Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 5

УДК 519.95

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

В. А. ЕМЕЛИЧЕВ

К ЗАДАЧАМ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 15 XII 1969)

Идея метода, основная схема которого будет изложена ниже, использовалась в последнее время для решения многих задач дискретной оптимизации: вариантных задач размещения производства ([1–6]), целочисленных задач линейного программирования ([7, 8]), задач дискретного программирования с сепарабельной ([9]) и несепарабельной ([10]) функцией цели, а также задач вогнутого программирования ([11]) и задач надежности устройства ([12]).

В настоящей заметке этот метод (ψ), основанный на построении последовательности планов, будет сформулирован в общем виде.

Пусть требуется найти минимум функции $F(x)$, определенной на конечном множестве $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Таким образом, требуется определить оптимальный элемент (план) $p^* \in P$, т. е. такой, что

$$F(p^*) = \min \{F(p_i) \,|\, p_i \in P\}.$$

Метод ψ применим к этой задаче (А), если выполняются следующие условия:

1) можно найти конечное расширение $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ множества P ($P \subseteq R$) и функцию $Q(x)$, определенную на R, такую, что $Q(x) \leqslant F(x)$ для всех $x \in P$;

2) можно построить алгоритм φ, который на k-м шаге ($k = 1, 2, \ldots$) эффективно находит элемент $r_{j_k} \in R$, обладающий свойством

$$Q(r_{j_k}) = \min_{x \in R_k} Q(x), \quad k = 1, \ldots, m,$$

где $R_k = R_{k-1} \setminus r_{j_{k-1}}$, причем $R_1 = R$ *.

Если из последовательности $r_{j_1}, r_{j_2}, \ldots$, построенной с помощью φ, удалить элементы, не принадлежащие множеству P, то для оставшейся последовательности $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots$ имеет место следующий

Критерий оптимальности. *Если существует такое натуральное число t ($t \leqslant n$), что*

$$Q(p_{i_t}) \geqslant \min F(p_{i_s}) = F(p^*), \tag{1}$$

то p^* — оптимальный элемент задачи А.

Таким образом, процедура ψ нахождения оптимального элемента задачи А состоит в следующем. На k-м шаге ($k = 1, 2, \ldots$) с помощью алгоритма φ находим элемент r_{j_k} и проверяем, принадлежит ли он множеству P. Если нет, то переходим к следующему шагу алгоритма ψ. Если да ($r_{j_k} = p_{i_t}$), то проверяем, выполняется ли условие (1). Если да — процесс обрывается и p^* — оптимальный элемент задачи А. Если нет, то переходим к следующему шагу алгоритма ψ.

---

* Иначе говоря, должен существовать эффективный метод построения последовательности элементов множества R в порядке неубывания функции $Q(x)$ (ср. с ([10])).

З а м е ч а н и я. 1. Если на k-м шаге алгоритма ψ можно уточнить аппроксимирующую функцию $Q(x)$, т. е. найти функцию $Q_k(x)$, удовлетворяющую условию

$$Q(x) \leqslant Q_{k-1}(x) \leqslant Q_k(x) \leqslant F(x)$$

для всех $x \in R_k$, то процедура может ускориться.

2. Очевидно, если не существует числа t, удовлетворяющего условию (1), то алгоритм ψ превращается в полный перебор. Однако, как указывалось в ([2, 11]), на каждом шаге можно оценить отклонение лучшего из полученных элементов множества P от оптимального.

3. Если функция $Q(x)$ совпадает с $F(x)$ на множестве P, то наша процедура превращается в схему, близкую к общей схеме, предложенной в ([13]). В этом случае оптимальный элемент задачи А ищется среди элементов r множества R, удовлетворяющих условию $Q(r) \leqslant F(p^*)$ ([7]).

Если при этом известна нижняя граница $\bar{F}$ значений функции $F(x)$ на множестве P, то это ускоряет процедуру, так как прежде чем проверить принадлежность элемента r_{j_k} множеству P *, мы должны убедиться, что $Q(r_j{}^k) \geqslant \bar{F}$ (в противном случае надо перейти к следующему шагу алгоритма ψ) ([7]).

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина
Минск

Поступило
1 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Емеличев, В. И. Комлик, Докл. АН БССР, **10**, № 10 (1966). [2] В. А. Емеличев, В. И. Комлик, Докл. АН БССР, **12**, № 10 (1968). [3] В. И. Комлик, Весцi АН БССР, сер. фiз.-мат. навук, № 4 (1967). [4] В. А. Емеличев, И. Ф. Клебанов, В. И. Комлик, Материалы межрегионального семинара по размещению промышленности и региональному развитию, Минск, 1968. [5] В. А. Емеличев, В. И. Комлик и др., Тр. II Республиканск. конф. математиков Белоруссии, Минск, 1969. [6] А. М. Гальперин, Техническая и экономическая информация, сер. Экономика химической промышленности, в. 8, М., 1968. [7] В. И. Комлик, В. А. Емеличев, Докл. АН БССР, **11**, № 12 (1967). [8] В. И. Комлик, В. А. Емеличев, Весцi АН БССР, сер. фiз.-мат. навук, № 4 (1968). [9] В. А. Емеличев, В. И. Комлик, Тр. семинара Автоматизированные системы управления предприятием, в. 1, Киев, 1968. [10] В. А. Емеличев, В. И. Комлик, ДАН, **188**, № 2 (1969). [11] В. А. Емеличев, Весцi АН БССР, сер. фiз.-мат. навук, № 6 (1969). [12] В. А. Емеличев, В. И. Комлик, Весцi АН БССР, сер. фiз.-мат. навук, № 5 (1968). [13] E. Balas, Oper. Res., **16**, № 2 (1968).

* Эта проверка часто бывает трудоемкой; например, в случае, когда P — множество решений системы неравенств ([6, 7]).