Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 3

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

Я. А. РОЙТБЕРГ, З. Г. ШЕФТЕЛЬ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОБЩИХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 11 XI 1969)

В настоящей работе доказывается нётеровость некоторого класса общих нелокальных задач для эллиптических уравнений и систем (в том числе и с разрывными коэффициентами). В этих задачах «граничные условия» задаются линейными дифференциальными соотношениями, связывающими значения искомых функций и их производных в точках границы области с их значениями на некоторых гладких многообразиях, лежащих внутри области. Для уравнений и систем 2-го порядка подобная задача поставлена в интересной работе ([1]); там же предложена методика решения этой задачи, которая иллюстрируется на примере уравнения Лапласа с условиями типа условий Дирихле. Наша методика отлична от примененной в ([1]). Она использует развитую в последние годы общую теорию эллиптических задач, а также методы решения задач со сдвигом ([2-4]).

1. Пусть G — ограниченная область n-мерного эвклидова пространства; Γ — ее граница; G_1 — подобласть G с границей γ, не имеющей с Γ общих точек; $G_2 = G \setminus \overline{G}_1$. В $\overline{G}_r$ $(r = 1, 2)$ заданы линейные дифференциальные выражения $L_r(x, D) = L_r\left(x, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ порядка $2m_r$ с комплексными коэффициентами. Положим $2m_2 + m_1 = l$. На γ задано $2l$ линейных дифференциальных выражений $B_j^r(x, D)$ $(j = 1, \ldots, l;\ r = 1, 2)$, а на Γ — l выражений того же типа. Коэффициенты всех рассматриваемых выражений, а также поверхности Γ и γ предполагаем для простоты бесконечно гладкими.

Предположим, что существует диффеоморфизм $\hat{\alpha}$: $\Gamma \to \gamma$. Так как поверхности Γ и γ бесконечно гладки, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что при $|t| < \varepsilon$ отображение α: $x + \nu_\Gamma t \to \hat{\alpha}(x) + \nu_\gamma t$ (ν_Γ — орт внутренней нормали к Γ в точке x, ν_γ — орт внутренней относительно G_1 нормали к γ в точке $\hat{\alpha}(x)$) является диффеоморфизмом некоторой окрестности $U(\Gamma)$ в E_n поверхности Γ на окрестность $V(\gamma)$ в E_n поверхности γ. Для каждой функции $u(y)$ $(y \in V(\gamma))$ положим $(Ju)(x) = u(\alpha(x))$ $(x \in \Gamma)$. Если $A(y, D_y)$ $(y \in V(\gamma)$ — произвольное линейное дифференциальное выражение с гладкими коэффициентами, то $J(A(y, D_y)v(y))(x) = \hat{A}(x, D_x)(Jv)(x)$, где $\hat{A}(x, D_x)$ $(x \in U(\Gamma))$ — дифференциальное выражение, характеристический полином которого $\hat{A}_0(x, \xi)$ естественным образом выражается через характеристический полином $A_0(y, \eta)$ выражения $A(y, D_y)$:

$$\hat{A}_0(x, \xi) = A_0(\alpha(x), T\xi),$$

где T — транспонированная матрица Якоби преобразования α^{-1}.

Рассмотрим задачу:

$$L_1 u_1(x) = f_1(x) \quad (x \in G_1), \tag{1}$$

$$L_2 u_2(x) = f_2(x) \quad (x \in G_2), \tag{2}$$

$$B_j u \equiv J(B_j^1 u_1(y) + B_j^2 u_2(y))(x) + B_j^3 u_2(x) = \varphi_j(x) \tag{3}$$

$$(x \in \Gamma,\ y = \alpha^{-1}(x) \in \gamma;\ j = 1, \ldots, l).$$

Задачу (1) — (3) будем называть эллиптической, если выполнены следующие условия А, Б:

А. Дифференциальные выражения L_1, L_2 правильно эллиптичны соответственно в $\overline{G}_1$, $\overline{G}_2$. Отсюда следует, что для каждой точки $x \in \Gamma$, любого вектора $\tau \neq 0$, касательного к Γ в точке x, и орта нормали ν к Γ в этой точке η-корни каждого из полиномов $L_{r,0}(\alpha(x), T(\tau + \eta\nu))$ $(r = 1, 2)$, $L_{2,0}(x, \tau + \eta\nu)$ расположены поровну в верхней и нижней полуплоскостях. Поэтому

$$L_{r,0}(\alpha(x), T(\tau + \eta\nu)) = L_r^+(\alpha(x), T(\tau + \eta\nu))\, L_r^-(\alpha(x), T(\tau + \eta\nu)) \ (r = 1, 2),$$
$$L_{2,0}(x, \tau + \eta\nu) = L_2^+(x, \tau + \eta\nu)\, L_2^-(x, \tau + \eta\nu),$$

где η-корни полинома $L_2^+(L_2^-)$ имеют положительные (отрицательные) мнимые части.

Б. Существуют такие целые числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_l$, что порядок дифференциального выражения B_j^r $(r = 1, 2, 3)$ не превосходит $2m_r + \sigma_j$ $(m_3 = m_2;\ j = 1, \ldots, l;\ B_j^r \equiv 0$ при $2m_r + \sigma_j < 0)$, и если $B_{j,0}^r(x, D)$ — главная часть выражения B_j^r, которая состоит лишь из членов порядка $2m_r + \sigma_j$, то в каждой точке $x \in \Gamma$ для каждого $\tau \neq 0$, касательного к Γ в точке x, и орта нормали ν к Γ в этой точке векторы

$$(B_{j,0}^1(\alpha(x), T(\tau + \eta\nu)), B_{j,0}^2(\alpha(x), T(\tau + \eta\nu)), B_{j,0}^3(x, \tau + \eta\nu))$$
$$(j = 1, \ldots, l),$$

элементы которых рассматриваются как полиномы от η, линейно независимы по векторному модулю

$$(L_1^+(\alpha(x), T(\tau + \eta\nu)), L_2^-(\alpha(x), T(\tau + \eta\nu)), L_2^+(x, \tau + \eta\nu)).$$

Последнее означает, что из одновременного выполнения равенств

$$\sum_{j=1}^{l} c_j B_{j,0}^1(\alpha(x), T(\tau + \eta\nu)) = a_1(\eta)\, L_1^+(\alpha(x), T(\tau + \eta\nu)),$$
$$\sum_{j=1}^{l} c_j B_{j,0}^2(\alpha(x), T(\tau + \eta\nu)) = a_2(\eta)\, L_2^-(\alpha(x), T(\tau + \eta\nu)),$$
$$\sum_{j=1}^{l} c_j B_{j,0}^3(x, \tau + \eta\nu) = a_3(\eta)\, L_2^+(x, \tau + \eta\nu),$$

где c_j — постоянные, $a_i(\eta)$ $(i = 1, 2, 3)$ — полиномы, следует $c_1 = \ldots = c_l = 0$.

Теорема 1. *Для того чтобы оператор* Λ $(u_1, u_2) \to (L_1u_1, L_2u_2, B_1u, \ldots, B_lu)$ *был нётеровым оператором из пространства* $W_p^{2m_1+k}(G_1) \times W_p^{2m_2+k}(G_2)$ *в пространство* $W_p^k(G_1) \times W_p^k(G_2) \times \prod_{j=1}^{l} W_p^{k-\sigma_j-1/p}(\Gamma)$ *для любого целого неотрицательного* $k \geqslant \max_j \{\sigma_j\} + 1$ *и действительного* $p \in (1, \infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы задача* (1) — (3) *была эллиптической.*

Достаточность доказывается путем построения регуляризаторов. Для их построения зафиксируем точку $x_0 \in \Gamma$ и выберем достаточно малую сферическую окрестность в E_n этой точки $U(x_0) \subset U(\Gamma)$. Без ограничения общности можно считать, что $U(x_0) \cap \Gamma$ лежит в гиперплоскости $x_n = 0$ и что x_0 — начало координат. Рассмотрим сперва задачу (1) — (3)

в $(U(x_0)\cap \overline{G}_2)\cup \alpha U(x_0)$. Применив отображение α, мы сведем эту задачу к задаче в $U(x_0)\cap G_\alpha$ для системы уравнений с неизвестными функциями $v_1(x)=(Ju_1)(x)$, $v_2(x)=(Ju_2)\ (x_1,\ldots,x_{n-1},-x_n)\ v_3(x)=u_2(x)$. Тогда условие А означает, что последняя система эллиптична по Дуглису — Ниренбергу, а условие Б — что соответствующие граничные условия на $\Gamma\cap U(x_0)$ удовлетворяют обычному условию дополнительности. Теперь построение регуляризатора сводится к хорошо изученному случаю (см., например, ([5], [6])).

2. Пусть теперь $L(x, D)$ — правильно эллиптическое линейное дифференциальное выражение порядка $2m$ с гладкими коэффициентами, определенное в области $\overline{G}$. Рассмотрим задачу

$$Lu(x)=f(x),\quad x\in G, \tag{4}$$

$$C_ju=J\,(B_ju\,(y))\,(x)+B_j^3u\,(x)=\varphi_j\,(x) \tag{5}$$

$$(x\in\Gamma;\quad y=\alpha^{-1}x\in\gamma;\quad j=1,\ldots,m).$$

Добавив на γ $2m$ условий непрерывности

$$\partial^{j-1}u_1(y)\ /\ \partial\nu^{j-1}=\partial^{j-1}u_2(y)\ /\partial\ \nu^{j-1}\qquad (y\in\gamma;\quad j=1,\ldots,2m),$$

мы сведем эту задачу к задаче (1) — (3); если последняя эллиптична, то и задачу (4) — (5) будем называть эллиптической. Из теоремы 1 теперь легко следует, что для того чтобы отображение $u\to(Lu, C_1u,\ldots,C_mu)$ было нётеровым из $W_p^{2m+k}(G)$ в $W_p^k(G)\times\prod\limits_{j=1}^{m}W_p^{k-\sigma_j-1/p}(\Gamma)$, необходимо и достаточно, чтобы задача (4) — (5) была эллиптической.

В частности, если условия (5) являются условиями типа Дирихле

$$J\,(\beta_j\,(y)\,\partial^{j-1}u\,(y)/\partial\nu_\gamma^{j-1})\,(x)+\partial^{j-1}u\,(x)/\partial\nu_\Gamma^{j-1}=\varphi_j\,(x) \tag{6}$$

$$(x\in\Gamma;\quad y=\alpha^{-1}x\in\gamma;\quad j=1,\ldots,m),$$

где $\beta_j(y)$ — произвольные достаточно гладкие на γ функции, то условие Б всегда выполняется, т. е. задача (4), (6) эллиптична для любого правильно эллиптического выражения $L(x, D)$.

3. Ясно, что рассмотренная методика позволяет получить аналогичные результаты для пространств с гёльдеровскими нормами. Она позволяет также доказать нётеровость задачи, аналогичной задаче (1) — (3), и для случая, когда L_1, L_2 — матричные дифференциальные выражения, эллиптические по Дуглису — Ниренбергу, а граничные выражения удовлетворяют условию типа Б. Соответствующее условие мы здесь не формулируем из-за его громоздкости.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность Ю. М. Березанскому за обсуждение результатов.

Черниговский государственный педагогический институт
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
23 X 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Бицадзе, А. А. Самарский, ДАН, 185, № 4 (1969). [2] Г. С. Литвинчук, Э. Г. Хасабов, Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 4 (1964). [3] Р. А. Кордзадзе, ДАН, 155, № 4 (1964). [4] А. Б. Антоневич, Тр. II республ. конф. матем. Белоруссии, Минск, 1969. [5] Л. Р. Волевич, Матем. сборн., 68 (110), № 3 (1965). [6] В. А. Солонников, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, № 3 (1964); Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 92, 223 (1966).