

УДК 539.3

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_27
EDN: APZZLI**ИЗГИБ ЛОКАЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ КРУГЛОЙ ПЯТИСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ****В.С. Салицкий***Белорусский государственный университет транспорта, Гомель***BENDING A CIRCULAR FIVE-LAYER PLATE BY LOCAL LOAD****V.S. Salicki***Belarusian State University of Transport, Gomel*

Аннотация. Исследован изгиб упругой круглой пятислойной пластины под действием распределенной по кругу локальной поперечной нагрузки. В симметричной по толщине пластине три тонких несущих слоя (два внешних и один внутренний), деформирование которых подчиняется гипотезам Кирхгофа. В двух относительно толстых заполнителях нормаль остается прямолинейной и не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол. Система дифференциальных уравнений равновесия пластины получена вариационным методом Лагранжа. Аналитическое решение задачи выписано в функциях Бесселя в конечном виде. Приведены численные результаты исследования прогибов и относительных сдвигов в зависимости от радиуса силового круга, толщины внутреннего несущего слоя, материалов внешних несущих слоев.

Ключевые слова: пятислойная пластина, круговая нагрузка, аналитическое решение, численные исследования.

Для цитирования: Салицкий, В.С. Изгиб локальной нагрузкой круглой пятислойной пластины / В.С. Салицкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 27–31. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_27. – EDN: APZZLI

Abstract. The bending of an elastic circular five-layer plate under the action of a local transverse load distributed in a circle was studied. The plate, symmetrical in thickness, has three thin load-bearing layers (two external and one internal), the deformation of which obeys Kirchhoff's hypotheses. In two relatively thick fillers, the normal remains straight and does not change its length, but rotates through some additional angle. The system of differential equations for the equilibrium of the plate was obtained by the Lagrange variational method. The analytical solution of the problem is written in Bessel functions in final form. Numerical results of the study of deflections and relative shifts are presented depending on the radius of the force circle, the thickness of the internal load-bearing layer, and the materials of the external load-bearing layers.

Keywords: five-layer plate, circular load, analytical solution, numerical investigations.

For citation: Salicki, V.S. Bending a circular five-layer plate by local load / V.S. Salicki // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 3 (60). – P. 27–31. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_27 (in Russian). – EDN: APZZLI

Введение

В связи с возросшими современными требованиями промышленности к прочности и материалоемкости конструкций резко усилился спрос на использование композитных, в том числе пятислойных, элементов. Поэтому постановка и решение соответствующих краевых задач является актуальной проблемой.

Монографии [1]–[5] посвящены разработке механико-математических моделей и методов расчета слоистых элементов конструкций. Указаны особенности квазистатического и динамического деформирования, приведены примеры решения конкретных задач.

Динамическое воздействие на пятислойные пластины и трехслойные цилиндрические оболочки рассмотрено в работах [6]–[9]. Приняты гипотезы ломаной линии, исследованы свободные и вынужденные колебания.

Квазистатическому деформированию трехслойных круговых пластин посвящены статьи

[10]–[14]. Для несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа, для заполнителя – Тимошенко. Получены аналитические решения краевых задач и проведена их численная апробация.

Изгиб трехслойных пластин на основании Пастернака исследован в [15], [16]. В публикациях [17], [18] приводятся результаты о неосесимметричном нагружении трехслойных пластин в своей плоскости.

Система дифференциальных уравнений равновесия круглой пятислойной симметричной по толщине пластины получены в [19]. Решение краевой задачи об изгибе пятислойной круглой пластины под действием равномерно распределенной по внешней поверхности верхнего слоя нагрузкой приведено в [20], [21]. Здесь предлагается постановка и решение краевой задачи для пятислойной пластины, нагруженной локальной осесимметричной круговой нагрузкой.

1 Постановка и решение краевой задачи

Пусть на симметричную по толщине пяти-слойную круглую пластину действует локальная нагрузка, равномерно распределённая по кругу относительного радиуса $r \leq b$ (рисунок 1.1). Ее можно представить в следующем аналитическом виде:

$$q(r) = q_0 H_0(b-r), \quad (1.1)$$

где $H_0(x)$ – функция Хэвисайда; q_0 – интенсивность распределенной нагрузки.

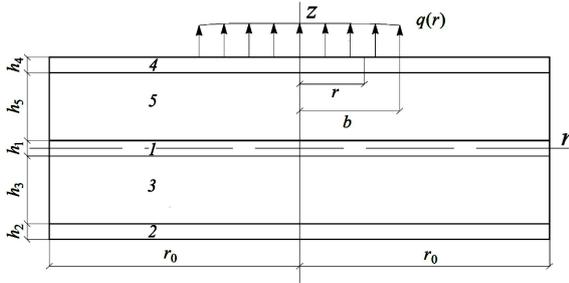


Рисунок 1.1 – Расчётная схема симметричной по толщине пятислойной круговой пластины

Для тонких жестких внешних и внутреннего несущих слоев толщиной $h_2 = h_4, h_1$ (см. рисунок 1.1) принимаются гипотезы Кирхгофа о прямолинейности, несжимаемости и перпендикулярности нормали к деформированной срединной поверхности. Эти слои принимают на себя основную силовую нагрузку. В легких более толстых заполнителях нормаль к срединной поверхности после приложения нагрузки остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$ – гипотеза Тимошенко. Задача решается в цилиндрической системе координат r, ϕ, z , связанной со срединной плоскостью заполнителя. Все геометрические параметры пластины отнесены к радиусу r_0 . В принятых условиях все перемещения в пластине выражаются через прогиб пластины $w(r)$, который во всех слоях одинаков, и сдвиг в заполнителях $\psi(r)$.

Система уравнений равновесия, полученная в [19], в случае нагрузки (1.1) принимает вид

$$L_2(a_4\psi - a_5w_{,r}) - 2cG_3\psi = 0, \\ L_3(a_5\psi - a_6w_{,r}) = -q_0H_0(b-r), \quad (1.2)$$

где запятой в индексе обозначена производная по следующей координате; коэффициенты

$$a_4 = \left[2K_2^+ h_2 h_3^2 + 2K_3^+ \frac{h_3^3}{3} \right], \\ a_5 = \left[K_2^+ h_2 h_3 (h_1 + 2h_3 + h_2) + 2K_3^+ h_3 \left(\frac{h_1 h_3}{4} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right], \\ a_6 = \left[2K_2^+ h_2 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2 h_3 + h_3^2 \right) + \right.$$

$$\left. + K_1^+ \frac{h_1^3}{12} + 2K_3^+ h_3 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right];$$

L_2, L_3 – дифференциальные операторы

$$L_2(g) \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \\ L_3(g) \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Краевую задачу о деформировании круглой пятислойной пластины локальной нагрузкой замкнем, добавив к системе уравнений (1.2) граничные условия заделки контура $r = r_0$:

$$\psi = w = w_{,r} = 0. \quad (1.3)$$

После элементарных преобразований в системе (1.2) можно выделить отдельное уравнение для сдвига в заполнителе $\psi(r)$ и переписать ее в виде

$$L_2(\psi) - \beta^2\psi = f, \\ L_3(a_5\psi - a_6w_{,r}) = -q_0H_0(b-r), \quad (1.4)$$

где коэффициенты и функция, входящие в первое уравнение

$$\beta^2 = \frac{2a_6h_3G_3}{a_4a_6 - a_5^2}, \quad \gamma_1 = \frac{a_5}{a_4a_6 - a_5^2}, \\ f(r) = \frac{a_5}{r(a_4a_6 - a_5^2)} \left(\int q_0H_0(b-r)rdr - C_1 \right) = \\ = \frac{\gamma_1}{r} \left(\frac{q_0(r^2 - b^2)}{2} H_0(b-r) - C_1 \right).$$

Решение системы дифференциальных уравнений (1.4) будет

$$\psi = C_2 I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r) + \psi_r, \\ w = \frac{a_5}{a_6} \int \psi dr + \frac{q_0}{a_6} \int L_3^{-1}(H_0(b-r)) dr - \\ - \frac{C_1}{4a_6} r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5 r^2}{4a_6} + C_6 \ln r + C_4 \quad (1.5)$$

$I_1(\beta r), K_1(\beta r)$ – функции Бесселя и Макдональда первого порядка; интегралы вычисляются в пределах от 0 до r ; ψ_r – частное решение первого из уравнений (1.4), которое получено методом вариации постоянных

$$\psi_r = \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(b-r) \times \quad (1.6)$$

$$\times \left[\frac{b^2}{r} - r + 2b(K_1(\beta b)I_1(\beta r) - I_1(\beta b)K_1(\beta r)) \right] + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2 r}.$$

Интегралы, входящие во второе уравнение системы (1.5), будут

$$\int L_3^{-1}(q) dr = \frac{q_0}{16} \left(\frac{r^4 - 5b^4}{4} - b^4 \ln \left(\frac{r}{b} \right) - \right. \\ \left. - 2b^2 r^2 \ln \left(\frac{r}{b} \right) + b^2 r^2 \right) H_0(b-r), \\ \int \psi dr = \frac{C_2 I_0(\beta r)}{\beta} - \frac{C_3 K_0(\beta r)}{\beta} + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2} \ln(r) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(b-r) \left[\frac{b^2 - r^2}{2} + b^2 \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \right. \\
 & \left. + \frac{2b}{\beta} (K_1(\beta b)I_0(\beta r) + I_1(\beta b)K_0(\beta r)) - \frac{2}{\beta^2} \right]. \quad (1.7)
 \end{aligned}$$

Константы интегрирования C_1, \dots, C_6 – при условии заделки по контуру пятислойной пластины (1.3) будут

$$\begin{aligned}
 C_1 &= -\frac{q_0 b^2}{2}, \quad C_2 = \frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2 I_1(\beta)} \left(\frac{b^2}{2} - bK_1(\beta)I_1(\beta b) \right), \\
 C_3 &= \frac{q_0 \gamma_1 b I_1(\beta b)}{\beta^2}, \\
 C_4 &= -\frac{a_5 \gamma_1 q_0}{a_6 \beta^4 I_1(\beta)} \left(\frac{b^2 I_0(\beta) \beta}{2} - bI_1(\beta b) \right) + \frac{q_0 b^4}{32a_6} + \frac{q_0 b^2}{16a_6}, \\
 C_5 &= \frac{q_0 b^2}{8} (2 - b^2), \quad C_6 = \frac{q_0 b^4}{16a_6}.
 \end{aligned}$$

Решение (1.5) с учетом частного решения (1.6) и интегралов (1.7) для пластины, заделанной по контуру, принимает вид:

$$\begin{aligned}
 \psi &= \frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2} \left\{ \frac{I_1(\beta r)}{I_1(\beta)} \left(\frac{b^2}{2} - bK_1(\beta)I_1(\beta b) \right) + \right. \\
 & \left. + bI_1(\beta b)K_1(\beta r) + \frac{H_0(b-r)}{2} \times \right. \\
 & \left. \times \left[\frac{b^2}{r} - r + 2b(K_1(\beta b)I_1(\beta r) - I_1(\beta b)K_1(\beta r)) - \frac{b^2}{2r} \right] \right\}, \\
 w &= \frac{a_5}{a_6} \frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2 I_1(\beta)} \left\{ \frac{I_0(\beta r)}{\beta I_1(\beta)} \left(\frac{b^2}{2} - bK_1(\beta)I_1(\beta b) \right) - \right. \\
 & - \frac{b^2 I_0(\beta) \beta}{2\beta^2 I_1(\beta)} + \frac{bI_1(\beta b)}{\beta^2 I_1(\beta)} - \frac{bI_1(\beta b)K_0(\beta r)}{\beta} - \\
 & - \frac{b^2}{2} \ln(r) \frac{H_0(b-r)}{2} \left[\frac{b^2 - r^2}{2} + b^2 \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \right. \\
 & \left. + \frac{2b}{\beta} (K_1(\beta b)I_0(\beta r) + I_1(\beta b)K_0(\beta r)) - \frac{2}{\beta^2} \right] \left. \right\} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{q_0}{8a_6} \left\{ \left(\frac{r^4 - 5b^4}{8} - \frac{b^4}{2} \ln\left(\frac{r}{b}\right) - b^2 r^2 \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{b^2 r^2}{2} \right) \times \right. \\
 & \quad \times H_0(b-r) + b^2 r^2 (\ln r - 1) + \\
 & \quad \left. + \frac{b^2}{4} r^2 (2 - b^2) + \frac{b^4}{2} \ln r + \frac{b^4}{4a_6} + \frac{b^2}{2a_6} \right\}. \quad (1.8)
 \end{aligned}$$

2 Численные результаты

Численно исследованы, приведенные в (1.8), прогиб и сдвиг в пятислойной круглой пластине радиуса $r_0 = 1$. За основную расчетную модель принята пластина со слоями из материалов Д16-Т – фторопласт – Д16-Т – фторопласт – Д16-Т. Толщины несущих слоев: $h_1 = h_2 = h_4 = 0,02$, заполнителей: $h_3 = h_5 = 0,1$. Величина нагрузки $q_0 = 10$ МПа. Упругие характеристики этих материалов приведены в [1].

Рисунок 2.1 *a, б* иллюстрирует изменение перемещений в базовой модели в зависимости от радиальной координаты при различных значениях радиуса b пятна круговой нагрузки q . При увеличении радиуса пятна перемещения увеличиваются нелинейно.

Зависимость максимальных прогиба и относительного сдвига от величины пятна приложенной распределённой нагрузки при различной толщине внутреннего несущего слоя представлена на рисунке 2.2 *a, б*. Уменьшение толщины внутреннего несущего слоя в 2 раза приводит к увеличению прогиба на 11,4 процента. Увеличение толщины внутреннего несущего слоя в 1,5 раза приводит к уменьшению прогиба на 15,2 процента.

Влияние механических характеристик материалов внешних несущих слоёв на величину максимальных перемещений в зависимости радиуса пятна нагрузки иллюстрирует рисунок 2.3 *a, б*. Замена материала наружных несущих слоёв на титановый сплав приводит к уменьшению прогиба на 5 процентов. Применение более жестких несущих слоёв из кордиерита уменьшает максимальные перемещения по сравнению с базовым вариантом на 37,5 процентов.

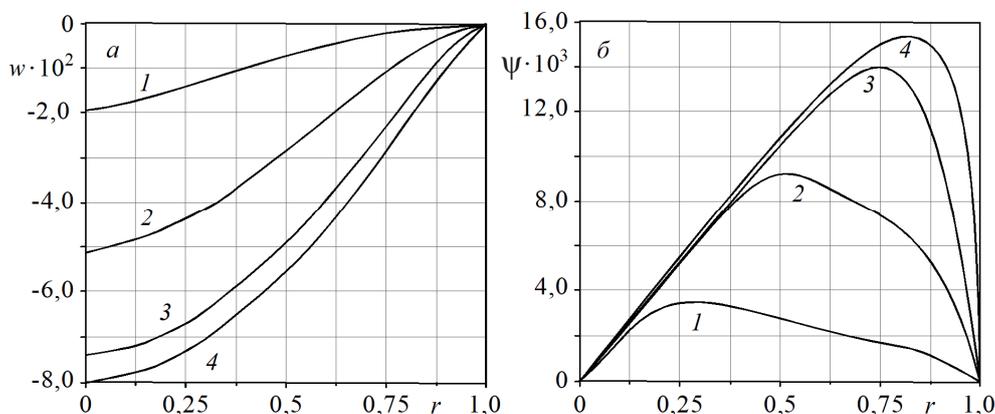


Рисунок 2.1 – Перемещения в пластине при различных радиусах b пятна нагрузки
 $1 - b = 0,25; 2 - b = 0,5; 3 - b = 0,75; 4 - b = 1$

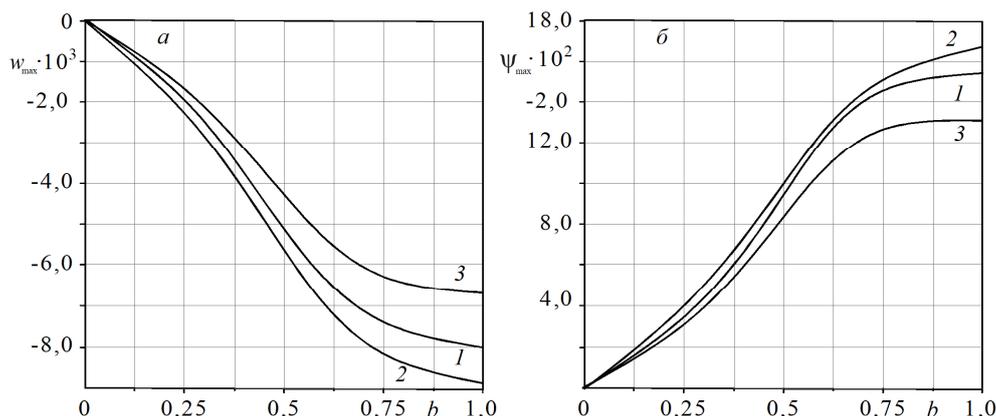


Рисунок 2.2 – Максимальные перемещения в зависимости от радиуса пятна нагрузки
 $1 - h_1 = 0,02$; $2 - h_1 = 0,01$; $3 - h_1 = 0,03$

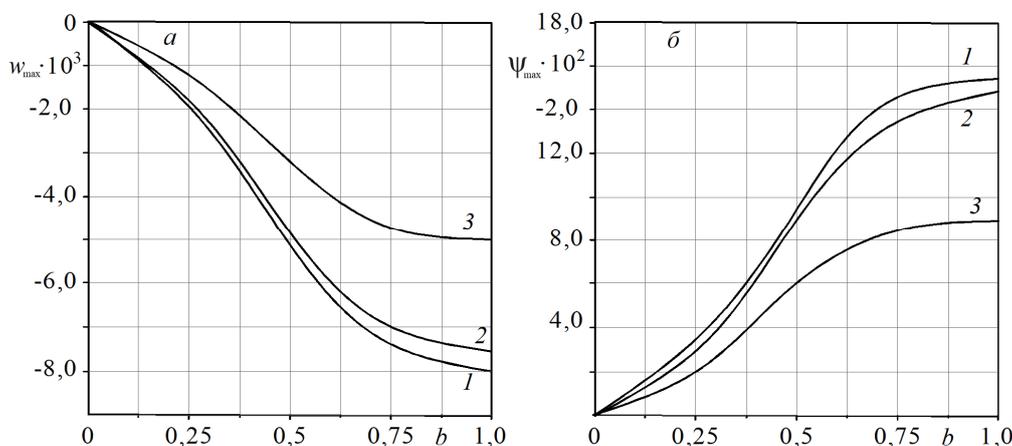


Рисунок 2.3 – Зависимость перемещений пятислойной пластины от радиуса пятна нагрузки при различных материалах внешних несущих слоёв (а, б)
 $1 - \text{Д16-Т} - \text{Фторопласт-4} - \text{Д16-Т} - \text{Фторопласт-4} - \text{Д16-Т}$;
 $2 - \text{Титан} - \text{Фторопласт-4} - \text{Д16-Т} - \text{Фторопласт-4} - \text{Титан}$;
 $3 - \text{Кордиерит} - \text{Фторопласт-4} - \text{Д16-Т} - \text{Фторопласт-4} - \text{Кордиерит}$

Заключение

Предложенная в работе постановка краевой задачи и полученное решение описывает напряженно-деформированное состояние круглой пятислойной пластины при локальной круговой поверхностной нагрузке. Это позволяет продолжить построение подобных моделей при других видах локальных нагрузок. Численные результаты подтвердили существенное влияние локальности поверхностной нагрузки и вида материалов несущих слоев на величину максимальных прогиба и относительного сдвига в пластине.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков, А.Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
2. Aghalovyan, L. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells / L. Aghalovyan. – Singapore – London: World Scientific Publishing, 2015. – 376 p.

3. Журавков, М.А. Математические модели механики твердого тела // М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. – Минск: БГУ, 2021 – 535 с.
4. Zhuravkov, M.A. Mechanics of Solid Deformable Body / M.A. Zhuravkov, Lyu Yongtao, E.I. Starovoitov. – Singapore: Springer, 2022. – 317 p.
5. Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э.И. Старовойтов, Н.Б. Рузиева. – Ташкент: «IDEAL PRESS», 2023 – 381 с.
6. Лачугина, Е.А. Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими заполнителями / Е.А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 212–219.
7. Лачугина, Е.А. Частоты собственных колебаний пятислойной круговой пластины / Е.А. Лачугина // Теоретическая и прикладная механика. – Минск: БНТУ, 2023. – Вып. 38. – С. 227–233.

8. Gorshkov, A.G. Harmonic vibrations of a viscoelastoplastic sandwich cylindrical shell / A.G. Gorshkov, E.I. Starovoitov, A.V. Yarovaia // International Applied Mechanics. – 2001. – Т. 37, № 9. – С. 1196–1203. DOI: 10.1023/A:1013290600951.
9. Старовойтов, Э.И. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т. 21, № 2. – С. 162–169.
10. Деформирование ступенчатой композитной балки в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Ю.М. Плещачевский, Д.В. Леоненко, Д.В. Тарлаковский // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Т. 88, № 4. – С. 987–993.
11. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – № 1 (22). – С. 31–35.
12. Захарчук, Ю.В. Трехслойная круговая упругопластическая пластина со сжимаемым наполнителем / Ю.В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 72–79.
13. Starovoitov, E.I. Elastic circular sandwich plate with compressible filler under axially symmetrical thermal force load / E.I. Starovoitov, Y.V. Zakharchuk, E.L. Kuznetsova // Journal of the Balkan Tribological Association. – 2021. – № 27 (2). – P. 175–188.
14. Старовойтов, Э.И. Изгиб трехслойной пластины равномерно распределенной нагрузкой в нейтронном потоке / Э.И. Старовойтов // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 3 (48). – С. 56–62. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_3_48_56
15. Старовойтов, Э.И. Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / Э.И. Старовойтов, А.Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 392–406.
16. Козел, А.Г. Математическая модель деформирования круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 42–46.
17. Нестерович, А.В. Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой однослойной пластины / А.В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 54–61.
18. Нестерович, А.В. Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А.В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – № 12 (12). – С. 152–157.
19. Салицкий, В.С. Уравнения равновесия круговой пятислойной пластины в усилиях / В.С. Салицкий // Материалы XXVII Междунар. симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – 2021. – Т. 1. – С. 199–201.
20. Салицкий, В.С. Изгиб защемлённой по контуру круговой пятислойной пластины / В.С. Салицкий // Механика. Исследования и инновации. – Гомель, 2022. – Вып. 15 – С. 209–213.
21. Салицкий, В.С. Изгиб круговой пятислойной пластины / В.С. Салицкий // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 2023. – Вып. 38. – С. 234–239.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-25».

Поступила в редакцию 08.04.2024.

Информация об авторах

Салицкий Владислав Сергеевич – аспирант