Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 5

УДК 517.917

МАТЕМАТИКА

И. Т. КИГУРАДЗЕ

ОБ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ n-го ПОРЯДКА

(Представлено академиком И. Н. Векуа 9 XII 1969)

В настоящей заметке приводятся достаточные условия разрешимости краевой задачи

$$u^{(n)} = f(t, u, u', \ldots, u^{(n-1)}), \tag{1}$$

$$u^{(i-1)}(a) = u_{0i} \ (i = 1, 2, \ldots, n-1), \quad u^{(m-1)}(b) = u_0, \tag{2}$$

где $1 \leqslant m \leqslant n-1$, $-\infty < a < b < +\infty$, $-\infty < u_{0i}$, $u_0 < +\infty$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, а функция $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ определена в области $a < t < b$, $-\infty < x_1, \ldots, x_n < +\infty$, измерима по t, непрерывна по $x_1, \ldots, x_n$ и

$$f^*(t; \rho) = \sup\{|f(t, x_1, \ldots, x_n)| : |x_k| \leqslant \rho \quad (k = 1, 2, \ldots, n)\} \in$$
$$\in L(a + \delta, b - \delta)$$

при любых $\rho \in (0, +\infty)$ и $\delta \in (0, b - a/2)$.

В отличие от рассмотренных другими авторами случаев (см., например, ([1,2])), ниже предполагается, что функция $f(t, x_1, \ldots, x_n)$, имея сингулярности при $t = a$ и $t = b$, вообще, не является суммируемой по t на отрезке $a < t < b$.

Для дальнейшего удобно ввести следующее

Определение. Пусть $\omega(t, x_1, \ldots, x_k)$ — неотрицательная функция, определенная в области $t_1 < t < t_2, -\infty < x_1, \ldots, x_n + \infty$. Скажем, что она принадлежит множеству $B_j^k(t_1, t_2)$, где $j \in \{1, 2\}$, если для любого $\rho \in (0, +\infty)$ найдется такая неотрицательная и непрерывная в промежутке $t_1 < t < t_2$ функция $\varphi_\rho(t)$, что $(t - t_j)^{k-1}\varphi_\rho(t) \in L(t_1, t_2)$ и $|v^{(k)}(t)| \leqslant \varphi_\rho(t)$ при $\min\{t_0, t_j\} < t < \max\{t_0, t_j\}$, каковы бы ни были число $t_0 \in [t_1, t_2]$ и функция $v(t)$, абсолютно непрерывная вместе с $v^{(i)}(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ в промежутке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ и удовлетворяющая условиям

$$|v^{(i-1)}(t)| \leqslant \rho |t - t_j|^{1-i} \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

$$v^{(k+1)}(t) \operatorname{sign}[(t_j - t)\, v^{(k)}(t)] \leqslant \omega(t, v'(t), \ldots, v^{(k)}(t)) \text{ при } t_1 < t < t_2,$$

$$|v^{(k)}(t_0)| < \rho.$$

Через $D_r(t_1, t_2)$ ниже обозначается множество

$$D_r(t_1, t_2) =$$
$$= \{t, x_1, \ldots, x_n) : t_1 < t < t_2, |x_k| \leqslant r \ (k = 1, \ldots, m),$$
$$|x_k| \leqslant r(b - t)^{m-k} (k = m + 1, \ldots, n - 1), |x_n| < +\infty\}.$$

Теорема 1. *Если*

$$f(t, x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \operatorname{sign} x_{n-1} \geqslant 0 \text{ при } a < t < b,$$
$$-\infty < x_1, \ldots, x_{n-2} < +\infty, \quad r_0 \leqslant |x_{n-1}| < +\infty,$$

$$f(t, x_1, \ldots, x_n) \operatorname{sign} x_n \geqslant -\omega_1(t, x_n) \textit{ при } (t, x_1, \ldots, x_n) \in D_r(a, \beta), \tag{3}$$
$$f(t, x_1, \ldots, x_n) \operatorname{sign} x_n \leqslant \omega_2(t, x_{m+1}, \ldots, x_n) \textit{ при } (i, x_1, \ldots, x_n) \in D(\alpha, \beta),$$

где $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$,

$$r_0 > 0, \quad r = (n-m)!\,(n-1)\,(1+b-a)^{n-2} \times$$
$$\times \max\{|u_{0i}|\,(i=1,2,\ldots,n-1),\ |u_0|,\ r_0\}.$$
$$\omega_1(t, x_1) \in B_1{}^1(a, \beta), \qquad \omega_2(t, x_1, \ldots, x_{n-m}) \in B_2{}^{n-m}(\alpha, b), \tag{4}$$

то задача (1) — (2) *разрешима.*

При специальном выборе функций $\omega_1(t, x_1)$ и $\omega_2(t, x_1, \ldots, x_{n-m})$ из теоремы 1 можно получить ряд достаточных условий разрешимости задачи (1) — (2). Приведем некоторые из них:

Теорема 2. *Пусть соблюдаются условия* (3) *и* (4),

$$f(t, x_1, \ldots, x_n)\operatorname{sign} x_n \geqslant -h_1(t)\,(1+|x_n|)^{\lambda_1} \ \text{при}\ (t, x_1, \ldots, x_n) \in D_r(a, \beta), \tag{5}$$

$$f(t, x_1, \ldots, x_n)\operatorname{sign} x_n \leqslant h_2(t)\,(1+|x_n|)^{\lambda_2} \ \text{при}\ (t, x_1, \ldots, x_n) \in D_r(\alpha, \beta), \tag{6}$$

где $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$, λ_1 *и* $h_1(t)$ *удовлетворяют одному из следующих двух условий:*

1) $\lambda_1 < 1$, $h_1(t) \geqslant 0$, $h_1(t) \in L(t_0, \beta)$ *при любом* $t_0 \in (a, \beta)$ *и*

$$\left[\int_t^\beta h_1(\tau)\,d\tau\right]^{\frac{1}{1-\lambda_1}} \in L(a, \beta);$$

2) $1 \leqslant \lambda_1 \leqslant 2$ *и*

$$(1 + |\ln(t-a)|)^{-1} h_1(t) \in L^{p_1}(a, \beta),$$

где $p_1 = \dfrac{1}{2-\lambda_1}$ *при* $\lambda_1 < 2$ *и* $p_1 = +\infty$ *при* $\lambda_1 = 2$,

а λ_2 *и* $h_2(t)$ *удовлетворяют одному из следующих двух условий:*

1) $\lambda_2 < 1$, $h_2(t) \geqslant 0$, $h_2(t) \in L(\alpha, t_0)$ *при любом* $t_0 \in (\alpha, b)$ *и*

$$(b-t)^{n-m-1}\left[\int_\alpha^t h_2(\tau)\,d\tau\right]^{1/(1-\lambda_2)} \in L(\alpha, b);$$

2) $1 \leqslant \lambda_2 \leqslant 2$ *и*

$$(b-t)^{(n-m-1)(1-\lambda_2)}(1 + |\ln(b-t)|)^{-1} h_2(t) \in L^{p_2}(\alpha, b),$$

где $p_2 = \dfrac{1}{2-\lambda_2}$ *при* $\lambda_2 < 2$ *и* $p_2 = +\infty$ *при* $\lambda_2 = 2$.

Тогда задача (1) — (2) *разрешима.*

Теорема 3. *Пусть соблюдаются условия* (3), (4) *и* (5), *где* λ_1 и $h_1(t)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 2. *Пусть далее*

$$f(t, x_1, \ldots, x_n)\operatorname{sign} x_n \leqslant h_{20}(t) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n-m} h_{2k}(t)\,(1+|x_{m+k}|)^{(n-m+1)/k-1/kp_{2k}} \ \text{при}\ (t, x_1, \ldots, x_n) \in D_r(\alpha, b),$$

где

$$a < \alpha < b, \quad 1 \leqslant p_{2k} < +\infty \quad (k = 1, 2, \ldots, n-m),$$
$$(b-t)^{n-m} h_{20}(t) \in L(\alpha, b), \quad h_{2k}(t) \in L^{p_{2k}}(\alpha, b) \quad (k = 1, 2, \ldots, n-m).$$

Тогда задача (1) — (2) *разрешима.*

Теорема 4. *Пусть соблюдаются условия* (3), (4) *и* (6), *где* $a < \alpha < b$, $\lambda_2 > 1$, *функция* $h_2(t)$ *положительна,* $h_2(t) \in L(\alpha, b)$ *и*

$$\int_\alpha^b (b-t)^{n-m-1}\left[\int_t^b h_2(\tau)\,d\tau\right]^{1-(1-\lambda_2)} dt = +\infty.$$

Пусть, далее,

$$f(t, x_1, \ldots, x_n) \operatorname{sign} x_n \geqslant -h_1(t)(1 + |x_n|)^{\lambda_1} \text{ при } (t, x, \ldots, x_n) \in D_r(a, b),$$

где λ_1 *и* $h_1(t)$ *удовлетворяют условиям теоремы 2 для любого* $\beta \in (a, b)$. *Тогда задача* (1) — (2) *разрешима.*

Теорема 5. *Пусть соблюдаются условия* (3), (4) *и* (5), *где* $a < \beta < b$, $\lambda_1 > 1$, *функция* $h_1(t)$ *положительна,* $h_1(t) \in L(a, \beta)$ *и*

$$\int_a^\beta \left[\int_a^t h_1(\tau)\, d\tau \right]^{1/(1-\lambda_1)} dt = +\infty.$$

Пусть, далее,

$$f(t, x_1, \ldots, x_n) \operatorname{sign} x_n \leqslant h_2(t)(1 + |x_n|)^{\lambda_2} \quad \text{при} \quad (t, x_1, \ldots, x_n) \in D_r(a, b),$$

где λ_2 *и* $h_2(t)$ *удовлетворяют условиям теоремы 2 для любого* $\alpha \in (a, b)$. *Тогда задача* (1) — (2) *разрешима.*

Институт прикладной математики
Тбилисского государственного университета

Поступило
3 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Я. Лепин, А. Д. Мышкис, ДАН, 169, № 1, 16 (1966). [2] Ю. А. Клоков, ДАН, 176, № 3, 512(1967).