МАТЕМАТИКА

УДК 512.548

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_54
EDN: QXHKOX

ПОЛИАДИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП В ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. I

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, *Могилёв*

POLYADIC ANALOGUES OF NORMAL SUBGROUPS IN POLYADIC GROUPS OF SPECIAL FORM. I

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, *Mogilev*

Аннотация. В статье изучаются полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида, то есть в полиадических группах с l-арной операцией $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$, которая называется полиадической операцией специального вида и определяется на декартовой степени A^k n-арной группы $< A, \eta >$ с помощью подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$, порядка делящего $l - 1$, и n-арной операции η.

Ключевые слова: *полиадическая операция*, *полуинвариантные l-арные подгруппы*, *n-полуинвариантные l-арные подгруппы.*

Для цитирования: *Гальмак*, *А.М.* Полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 54–58. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_54. – EDN: QXHKOX

Abstract. The article studies the normal subgroups in polyadic groups of special form, that is in polyadic groups with l-ary operation $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$, that is called polyadic operation of special form and is defined on Cartesian power of A^k n-ary group $< A, \eta >$ by substitution $\sigma \in \mathbf{S}_k$ which order divides $l - 1$ and n-ary operation η.

Keywords: *polyadic operation*, *semiinvariant l-ary subgroups*, *n-semiinvariant l-ary subgroups*.

For citation: *Gal'mak*, *A.M.* Polyadic analogues of normal subgroups in polyadic groups of special form. I / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 3 (60). – P. 54–58. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_54 (in Russian). – EDN: QXHKOX

Введение

Инвариантные и полуинвариантные l-арные подгруппы впервые появились у В. Дёрнте в [1] и являются полиадическими аналогами нормальных подгрупп. При $l = 2$ понятия полуинвариантности и инвариантности совпадают, так как определяющие их равенства принимают вид равенства $xB = Bx$, определяющего нормальные подгруппы. Указанные полиадические аналоги В. Дёрнте являются частными случаями более общего понятия – n-полуинвариантных l-арных подгрупп. Их изучению в полиадических группах специального вида и посвящёна данная статья.

1 Предварительные сведения

Напомним, что l-арную подгруппу $< B, \eta >$ l-арной группы $< A, \eta >$ называют [2, с. 52] *инвариантной* в ней, если

$$\eta(x\underbrace{B \ldots B}_{l-1}) = \eta(Bx\underbrace{B \ldots B}_{l-2}) = \ldots$$

$$\ldots = \eta(\underbrace{B \ldots B}_{l-1}xB) = \eta(\underbrace{B \ldots B}_{l-1}x)$$

для любого $x \in A$. Если же

$$\eta(x\underbrace{B \ldots B}_{l-1}) = \eta(\underbrace{B \ldots B}_{l-1}x)$$

для любого $x \in A$, то $< B, \eta >$ называют [2, с. 55] *полуинвариантной* в $< A, \eta >$.

Полуинвариантные и инвариантные l-арные подгруппы являются частными случаями более общего понятия из следующего определения.

***Определение* 1.1**. l-Арная подгруппа $< B, \eta >$ l-арной группы $< A, \eta >$, где $l = s(n - 1) + 1$, $s \geq 1$, называется *n-полуинвариантной* в ней, если

$$\eta(x\underbrace{B \ldots B}_{l-1}) = \eta(\underbrace{B \ldots B}_{i(n-1)}x\underbrace{B \ldots B}_{(s-i)(n-1)})$$

для любого $x \in A$ и любого $i = 1, \ldots, s$.

В развёрнутом виде последнее равенство переписывается следующим образом

$$\eta(x\underbrace{B \ldots B}_{l-1}) = \eta(\underbrace{B \ldots B}_{n-1}x\underbrace{B \ldots B}_{(s-1)(n-1)}) =$$

$$= \eta(\underbrace{B \ldots B}_{2(n-1)}x\underbrace{B \ldots B}_{(s-2)(n-1)}) = \ldots$$

$$\ldots = \eta(\underbrace{B\ldots B}_{(s-2)(n-1)}x\underbrace{B\ldots B}_{2(n-1)}) =$$

$$= \eta(\underbrace{B\ldots B}_{(s-1)(n-1)}x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{B\ldots B}_{l-1}x).$$

Ясно, что l-полуинвариантные l-арные подгруппы l-арной группы – это в точности её полуинвариантные l-арные подгруппы, а 2-полуинвариантные l-арные подгруппы l-арной группы – это в точности её инвариантные l-арные подгруппы.

Из определения 1.1 также следует, что всякая n-полуинвариантная l-арная подгруппа l-арной группы является и полуинвариантной в ней. В частности, полуинвариантными являются инвариантные l-арные подгруппы.

Имеет место

***Лемма* 1.1** [3, лемма 6.2]. *Если l-арная подгруппа $< B, \eta >$ l-арной группы $< A, \eta >$, где $l = s(n-1)+1$, $s \geq 1$, удовлетворяет условию*

$$\eta(x\underbrace{B\ldots B}_{l-1}) = \eta(\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x\underbrace{B\ldots B}_{(s-1)(n-1)}),$$

то для любого $i \geq 1$ выполняется условие

$$\eta(x\underbrace{B\ldots B}_{l-1}) = \eta(\underbrace{B\ldots B}_{j(n-1)}x\underbrace{B\ldots B}_{i(l-1)-j(n-1)}),$$

где $j = 0, 1, \ldots, is-1$.

Полагая в лемме 1.1 $i = 1$, получим

***Следствие* 1.1**. *Если l-арная подгруппа $< B, \eta >$ l-арной группы $< A, \eta >$, где $l = s(n-1)+1$, $s \geq 1$, удовлетворяет условию*

$$\eta(x\underbrace{B\ldots B}_{l-1}) = \eta(\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x\underbrace{B\ldots B}_{(s-1)(n-1)}),$$

то выполняется условие

$$\eta(x\underbrace{B\ldots B}_{l-1}) = \eta(\underbrace{B\ldots B}_{j(n-1)}x\underbrace{B\ldots B}_{(s-j)(n-1)}),$$

где $j = 0, 1, \ldots, s-1$.

В развёрнутом виде последнее равенство из следствия 1.1 переписывается следующим образом

$$\eta(x\underbrace{B\ldots B}_{l-1}) = \eta(\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x\underbrace{B\ldots B}_{(s-1)(n-1)}) =$$

$$= \eta(\underbrace{B\ldots B}_{2(n-1)}x\underbrace{B\ldots B}_{(s-2)(n-1)}) = \ldots = \eta(\underbrace{B\ldots B}_{(s-2)(n-1)}x\underbrace{B\ldots B}_{2(n-1)}) =$$

$$= \eta(\underbrace{B\ldots B}_{(s-1)(n-1)}x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}).$$

Ясно, что этого недостаточно для n-полуинвариантности l-арной подгруппы $< B, \eta >$ в l-арной группе $< A, \eta >$. Однако следствие 1.1 позволяет сформулировать следующий критерий n-полуинвариантности l-арной подгруппы $< B, \eta >$ *в* l-арной группе $< A, \eta >$, с помощью которого в [3] были определены n-полуинвариантные l-арные подгруппы l-арной группы.

***Предложение* 1.1**. *Полуинвариантная l-арная подгруппа $< B, \eta >$ l-арной группы $< A, \eta >$ является n-полуинвариантной в ней тогда и только тогда, когда*

$$\eta(x\underbrace{B\ldots B}_{l-1}) = \eta(\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x\underbrace{B\ldots B}_{(s-1)(n-1)}).$$

Можно показать [4, теорема 2.3.29], что для n-полуинвариантности конечной l-арной подгруппы $< B, \eta >$ в l-арной группе $< A, \eta >$ достаточно равенства

$$\eta(x\underbrace{B\ldots B}_{l-1}) = \eta(\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x\underbrace{B\ldots B}_{(s-1)(n-1)}).$$

В частности [4, следствие 2.3.30], для инвариантности конечной l-арной подгруппы $< B, \eta >$ l-арной группы $< A, \eta >$ достаточно равенства

$$\eta(\underbrace{B\ldots B}_{l-1}) = \eta(Bx\underbrace{B\ldots B}_{l-2}).$$

Если $< A, \eta >$ – n-арная группа, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n-1)+1$, $k \geq 2$, $\sigma \in \mathbf{S}_k$, то l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ определяется на декартовой степени A^k следующим образом:

$$\eta_{s,\sigma,k}((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{l1}, \ldots, x_{lk})) = (y_1, \ldots, y_k),$$

где

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) =$$

$$= \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{l\sigma^{l-1}(j)}), j \in \{1, \ldots, k\}.$$

В [5] было доказано, что если если $< A, \eta >$ – n-арная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – l-арная группа.

2 Вспомогательные результаты

***Предложение* 2.1**. *Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_l$ – подмножества n-арной группы $< A, \eta >$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in A^k$. Тогда*

$$\eta_{s,\sigma,k}(H_1^k \ldots H_{t-1}^k \mathbf{x} H_{t+1}^k \ldots H_l^k) =$$

$$= \eta(H_1 \ldots H_{t-1}x_{\sigma^{t-1}(1)}H_{t+1} \ldots H_l) \times \ldots$$

$$\ldots \times \eta(H_1 \ldots H_{t-1}x_{\sigma^{t-1}(k)}H_{t+1} \ldots H_l)$$

для любого $t = 1, \ldots, l$. В частности,

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}H_2^k \ldots H_l^k) =$$

$$= \eta(x_1H_2 \ldots H_l) \times \ldots \times \eta(x_kH_2 \ldots H_l),$$

$$\eta_{s,\sigma,k}(H_1^k \ldots H_{l-1}^k \mathbf{x}) =$$

$$= \eta(H_1 \ldots H_{l-1}x_{\sigma^{l-1}(1)}) \times \ldots \times \eta(H_1 \ldots H_{l-1}x_{\sigma^{l-1}(k)}).$$

Если подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то

$$\eta_{s,\sigma,k}(H_1^k \ldots H_{l-1}^k \mathbf{x}) =$$

$$= \eta(H_1 \ldots H_{l-1}x_1) \times \ldots \times \eta(H_1 \ldots H_{l-1}x_k).$$

Доказательство. Так как

$$\eta_{s,\sigma,k}(H_1^k \ldots H_{t-1}^k \mathbf{x} H_{t+1}^k \ldots H_l^k) =$$

$$= \{\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{h}_1 \ldots \mathbf{h}_{t-1}\mathbf{x}\mathbf{h}_{t+1} \ldots \mathbf{h}_l) \mid$$

$$\mathbf{h}_i \in H_i^k, i = 1, \ldots, t-1, t+1, \ldots, l\} =$$

$$= \{\eta_{s,\sigma,k}((h_{11}, \ldots, h_{1k}) \ldots (h_{(t-1)1}, \ldots, h_{(t-1)k})(x_1, \ldots, x_k)$$

$$(h_{(t+1)1}, \ldots, h_{(t+1)k}) \ldots (h_{l1}, \ldots, h_{lk})) \mid$$

$$h_{ij} \in H_i,\ i = 1, \ldots, t-1, t+1, \ldots, l;\ j = 1, \ldots, k\} =$$

$$= \{\eta(h_{11}h_{2\sigma(1)} \ldots h_{(t-1)\sigma^{t-2}(1)} x_{\sigma^{t-1}(1)}\ h_{(t+1)\sigma^{t}(1)} \ldots h_{l\sigma^{l-1}(1)}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(h_{1k}h_{2\sigma(k)} \ldots h_{(t-1)\sigma^{t-2}(k)} x_{\sigma^{t-1}(k)}\ h_{(t+1)\sigma^{t}(k)} \ldots h_{l\sigma^{l-1}(k)}) \mid$$

$$h_{i\sigma(j)} \in H_i,$$

$$i = 1, \ldots, t-1, t+1, \ldots, l;\ \sigma(j) = 1, \ldots, k\} =$$

$$= \eta(H_1 \ldots H_{t-1} x_{\sigma^{t-1}(1)} H_{t+1} \ldots H_l) \times \ldots$$

$$\ldots \times \eta(H_1 \ldots H_{t-1} x_{\sigma^{t-1}(k)} H_{t+1} \ldots H_l),$$

то верно первое равенство из условия леммы.

Второе и третье равенства получаются из первого, если в нём положить соответственно $t = 1$ и $t = l$.

Четвёртое равенство является следствием третьего, так как подстановка σ^{l-1} является тождественной. □

Следующее предложение, получается из предложении 2.1, если в нём положить

$$H_1 = \ldots = H_{t-1} = B,\ H_{t+1} = \ldots = H_l = C.$$

***Предложение* 2.2**. *Пусть B и C – подмножества n-арной группы $< A, \eta >$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in A^k$. Тогда*

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \ldots B^k}_{t-1}\ \mathbf{x}\ \underbrace{C^k \ldots C^k}_{l-t}) =$$

$$= \eta(\underbrace{B \ldots B}_{t-1}\ x_{\sigma^{t-1}(1)}\ \underbrace{C \ldots C}_{l-t}) \times \ldots$$

$$\ldots \times \eta(\underbrace{B \ldots B}_{t-1}\ x_{\sigma^{t-1}(k)}\ \underbrace{C \ldots C}_{l-t})$$

для любого $t = 1, \ldots, l$. В частности,

$$\eta_{1,\sigma,k}(\underbrace{B^k \ldots B^k}_{t-1}\ \mathbf{x}\ \underbrace{C^k \ldots C^k}_{n-t}) =$$

$$= \eta(\underbrace{B \ldots B}_{t-1}\ x_{\sigma^{t-1}(1)}\ \underbrace{C \ldots C}_{n-t}) \times \ldots$$

$$\ldots \times \eta(\underbrace{B \ldots B}_{t-1}\ x_{\sigma^{t-1}(k)}\ \underbrace{C \ldots C}_{n-t}),$$

где $t = 1, \ldots, n$.

***Лемма* 2.1**. *Пусть $< B, \eta >$ и $< C, \eta >$ – n-арные подгруппы n-арной группы $< A, \eta >$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in A^k$. Тогда*

1) $$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \ldots B^k}_{(i-1)(n-1)}\ \mathbf{x}\ \underbrace{C^k \ldots C^k}_{(s+1-i)(n-1)}) =$$

$$= \eta(\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(1)} \underbrace{C \ldots C}_{n-1}) \times \ldots$$

$$\ldots \times \eta(\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(k)} \underbrace{C \ldots C}_{n-1})$$

для любого $i = 2, \ldots, s + 1$;

2) $$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \ldots B^k}_{(i-1)(n-1)}\ \mathbf{x}\ \underbrace{B^k \ldots B^k}_{(s+1-i)(n-1)}) =$$

$$= \eta(\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(1)} \underbrace{B \ldots B}_{n-1}) \times \ldots$$

$$\ldots \times \eta(\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(k)} \underbrace{B \ldots B}_{n-1})$$

для любого $i = 2, \ldots, s + 1$;

3) $$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\underbrace{B^k \ldots B^k}_{l-1}) =$$

$$= \eta(x_1 \underbrace{B \ldots B}_{n-1}) \times \ldots \times \eta(x_k \underbrace{B \ldots B}_{n-1});$$

4) $$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \ldots B^k}_{l-1}\mathbf{x}) =$$

$$= \eta(\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x_{\sigma^{l-1}(1)}) \times \ldots \times \eta(\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x_{\sigma^{l-1}(k)});$$

5) *если подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то*

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \ldots B^k}_{l-1}\mathbf{x}) = \eta(\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x_1) \times \ldots \times \eta(\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x_k).$$

Доказательство. 1) Полагая в первом равенстве предложения 2.1

$$t = (i-1)(n-1) + 1,$$

$$H_1 = \ldots = H_{t-1} = B,\ H_{t+1} = \ldots = H_l = C,$$

где $i = 2, \ldots, s + 1$, и, учитывая тот факт, что $< B, \eta >$ и $< C, \eta >$ – n-арные подгруппы в $< A, \eta >$, получим

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \ldots B^k}_{(i-1)(n-1)}\ \mathbf{x}\ \underbrace{C^k \ldots C^k}_{(s+1-i)(n-1)}) =$$

$$= \eta(\underbrace{B \ldots B}_{(i-1)(n-1)} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(1)}\ \underbrace{C \ldots C}_{(s+1-i)(n-1)}) \times \ldots$$

$$\ldots \times \eta(\underbrace{B \ldots B}_{(i-1)(n-1)} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(k)}\ \underbrace{C \ldots C}_{(s+1-i)(n-1)}) =$$

$$= \eta(\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(1)} \underbrace{C \ldots C}_{n-1}) \times \ldots$$

$$\ldots \times \eta(\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(k)} \underbrace{C \ldots C}_{n-1}).$$

Следовательно, равенство из 1) верно.

2) Получается из 1) при $B = C$.

3) Полагаем во втором равенстве предложения 2.1

$$H_2 = \ldots = H_l = B,$$

где $< B, \eta >$ – n-арная подгруппа в $< A, \eta >$.

4) Полагаем в третьем равенстве предложения 2.1

$$H_1 = \ldots = H_{l-1} = B,$$

где $< B, \eta >$ – n-арная подгруппа в $< A, \eta >$.

5) Следует из 4), так как подстановка σ^{l-1} является тождественной. □

***Замечание* 2.1.** Все равенства в предложениях 2.1, 2.2 и лемме 2.1 можно записать более компактно. Например, если для $j = 1, \ldots, k$ положить

$$F_j = \eta(\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(j)} \underbrace{B \ldots B}_{n-1}),$$

$$G_j = \eta(x_j \underbrace{B \ldots B}_{n-1}),\quad H_j = \eta(\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x_j),$$

то равенства 2), 3) и 5) из леммы 2.1 примут вид

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \ldots B^k}_{(i-1)(n-1)}\ \mathbf{x}\ \underbrace{B^k \ldots B^k}_{(s+1-i)(n-1)}) = F_1 \times \ldots \times F_j \times \ldots \times F_k,$$

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\underbrace{B^k \ldots B^k}_{l-1}) = G_1 \times \ldots \times G_j \times \ldots \times G_k,$$

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}\mathbf{x}) = H_1 \times \dots \times H_j \times \dots \times H_k.$$

Полагая в лемме 2.1 $n = 2$, $B = C$, $\sigma^l = \sigma$, получим

***Следствие* 2.1** [6, лемма 4.1.1]. *Пусть подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *B – подгруппа группы A*,

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k.$$

Тогда:

1) $[\underbrace{B^k \dots B^k}_{i-1}\mathbf{x}\underbrace{B^k \dots B^k}_{l-i}]_{l,\sigma,k} =$
$$= Bx_{\sigma^{i-1}(1)}B \times \dots \times Bx_{\sigma^{i-1}(k)}B$$

для любого $i = 2, \dots, l-1$;

2) $[\mathbf{x}\underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}]_{l,\sigma,k} = x_1B \times \dots \times x_kB$;

3) $[\underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}\mathbf{x}]_{l,\sigma,k} = Bx_1 \times \dots \times Bx_k$.

3 Основной результат

Как отмечалось выше, если $< A, \eta >$ – n-арная группа, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$, то $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – l-арная группа. Понятно, что если $< B, \eta >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A, \eta >$, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – l-арная подгруппа l-арной группы $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

***Теорема* 3.1.** *Пусть подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, $< B, \eta >$ – *n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$. *Тогда*:

1) *если подстановка* σ^{n-1} *является тождественной, то l-арная подгруппа* $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *n-полуинвариантна в l-арной группе* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *тогда и только тогда, когда n-арная подгруппа* $< B, \eta >$ *полуинвариантна в n-арной группе* $< A, \eta >$;

2) *l-арная подгруппа* $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *полуинвариантна в l-арной группе* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *тогда и только тогда, когда n-арная подгруппа* $< B, \eta >$ *полуинвариантна в n-арной группе* $< A, \eta >$.

Доказательство. Так как подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – l-арная подгруппа l-арной группы $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

1) *Необходимость.* Из n-полуинвариантности $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ следует полуинвариантность $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, а это означает, что

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}) = \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}\mathbf{x}) \qquad (3.1)$$

для любого $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$. Тогда, ввиду утверждений 3) и 5) леммы 2.1,

$$\eta(x_1\underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(x_k\underbrace{B \dots B}_{n-1}) =$$
$$= \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1}x_1) \times \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1}x_k), \qquad (3.2)$$

откуда

$$\eta(x_j\underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1}x_j),\ j = 1, \dots, k \qquad (3.3)$$

для любого $x_j \in A$. В частности,

$$\eta(x_1\underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1}x_1)$$

для любого $x_1 \in A$, что означает полуинвариантность $< B, \eta >$ в $< A, \eta >$.

Достаточность. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ – произвольный элемент из A^k. Из полуинвариантности $< B, \eta >$ в $< A, \eta >$ следует (3.3), а это значит верно (3.2). Тогда, ввиду утверждений 3) и 5) леммы 2.1, верно (3.1).

Кроме того, используя полуинвариантность $< B, \eta >$ в $< A, \eta >$, а также тот факт, что $< B, \eta >$ – n-арная подгруппа в $< A, \eta >$, получим

$$\eta(x_j\underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \eta(x_j\underbrace{B \dots B}_{n-1}\underbrace{B \dots B}_{n-1}) =$$
$$= \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1}x_j\underbrace{B \dots B}_{n-1})$$

для любого $j = 1, \dots, k$, то есть

$$\eta(x_j\underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1}x_j\underbrace{B \dots B}_{n-1}).$$

Последнее равенство в силу тождественности подстановки σ^{n-1} переписывается следующим образом

$$\eta(x_j\underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1}x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(j)}\underbrace{B \dots B}_{n-1})$$

для любого $i = 2, \dots, s$. Тогда

$$\eta(x_1\underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(x_k\underbrace{B \dots B}_{n-1}) =$$
$$= \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1}x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(1)}\underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots$$
$$\dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1}x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(k)}\underbrace{B \dots B}_{n-1}).$$

Применив к последнему равенству утверждения 3) и 2) леммы 2.1, получим

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}) = \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{(i-1)(n-1)}\mathbf{x}\underbrace{B^k \dots B^k}_{(s+1-i)(n-1)}),$$

откуда и из равенства (3.1) следует n-полуинвариантность $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

2) Полагаем в 1) $n = l$. □

Считая в теореме 3.1 σ циклом длины $m \geq 2$, при этом m делит $l - 1$, получим

***Следствие* 3.1.** *Пусть* σ *– цикл из* $\mathbf{S}_k$ *длины* $m \geq 2$, *m делит $l - 1$*, $< B, \eta >$ *– n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$. *Тогда*:

1) *если m делит $n - 1$, то l-арная подгруппа* $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *n-полуинвариантна в l-арной группе* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *тогда и только тогда, когда n-арная подгруппа* $< B, \eta >$ *полуинвариантна в n-арной группе* $< A, \eta >$;

2) *l-арная подгруппа* $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *полуинвариантна в l-арной группе* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *тогда и*

только тогда, когда n-арная подгруппа $< B, \eta >$ *полуинвариантна в n-арной группе* $< A, \eta >$.

Полагая в следствии 3.1 $\sigma = (12 \dots m) \in \mathbf{S}_k$, получим

***Следствие* 3.2.** *Пусть m делит* $l - 1$, $< B, \eta >$ – *n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$. *Тогда*:

1) *если m делит* $n - 1$, *то l-арная подгруппа* $< B^k, \eta_{s, (12 \dots m), k} >$ *n-полуинвариантна в l-арной группе* $< A^k, \eta_{s, (12 \dots m), k} >$ *тогда и только тогда, когда n-арная подгруппа* $< B, \eta >$ *полуинвариантна в n-арной группе* $< A, \eta >$;

2) *l-арная подгруппа* $< B^k, \eta_{s, (12 \dots m), k} >$ *полуинвариантна в l-арной группе* $< A^k, \eta_{s, (12 \dots m), k} >$ *тогда и только тогда, когда n-арная подгруппа* $< B, \eta >$ *полуинвариантна в n-арной группе* $< A, \eta >$.

Полагая в следствии 3.2 $m = k$, получим

***Следствие* 3.3.** *Пусть k делит* $l - 1$, $< B, \eta >$ – *n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$. *Тогда*:

1) *если k делит* $n - 1$, *то l-арная подгруппа* $< B^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} >$ *n-полуинвариантна в l-арной группе* $< A^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} >$ *тогда и только тогда, когда n-арная подгруппа* $< B, \eta >$ *полуинвариантна в n-арной группе* $< A, \eta >$;

2) *l-арная подгруппа* $< B^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} >$ *полуинвариантна в l-арной группе* $< A^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} >$ *тогда и только тогда, когда n-арная подгруппа* $< B, \eta >$ *полуинвариантна в n-арной группе* $< A, \eta >$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dörnte*, *W.* Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
2. *Русаков*, *С.А.* Алгебраические *n*-арные системы / С.А. Русаков. – Минск: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
3. *Гальмак*, *А.М.* Конгруэнции полиадических групп / А.М. Гальмак. – Минск: Беларуская навука, 1999. – 182 с.
4. *Гальмак*, *А.М.* *n*-Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.
5. *Гальмак*, *А.М.* О разрешимости уравнений в $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2018. – №1 (51). – С. 4–10.
6. *Гальмак*, *А.М.* Полиадические операции и обобщённые матрицы / А.М. Гальмак. – Могилёв: МГУП, 2015. – 295 с.

Поступила в редакцию 30.04.2024.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор