МАТЕМАТИКА

УДК 512.548 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_59
EDN: RCLUXH

О РАЦИОНАЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЯХ СОПРЯЖЕННОЙ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ СОПРЯЖЕННЫМИ СУММАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

П.Г. Поцейко

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

ON RATIONAL APPROXIMATIONS OF CONJUGATE FUNCTION ON AN INTERVAL BY CONJUGATE VALLÉE POUSSIN SUMS

P.G. Patseika

Yanka Kupala State University of Grodno

Аннотация. Исследуются аппроксимации сопряженной функции на отрезке [–1, 1] суммами Валле Пуссена сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва с ограничениями на количество геометрически различных полюсов. Устанавливается интегральное представление соответствующих приближений. Для сопряженной функции с плотностью $(1-x)^{\gamma}$, $\gamma\in(0,1)$ получены интегральное представление приближений, оценка поточечных приближений и равномерных приближений с определенной мажорантой введенным методом рациональной аппроксимации. Устанавливается асимптотическое выражение мажоранты при $n\to\infty$, зависящее от параметров аппроксимирующей функции. Найдены оптимальные значения параметров, при которых обеспечивается наибольшая скорость убывания мажоранты. В качестве следствия найдены оценки приближений на отрезке [–1, 1] сопряженной функции суммами Валле Пуссена сопряженных полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва.

Ключевые слова: *сопряженная функция*, *ряд Фурье – Чебышёва*, *суммы Валле Пуссена*, *функция со степенной особенностью*, *поточечные и равномерные приближения*, *наилучшие приближения*, *асимптотические оценки.*

Для цитирования: *Поцейко*, *П.Г.* О рациональных аппроксимациях сопряженной функции на отрезке сопряженными суммами Валле Пуссена / П.Г. Поцейко // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 59–70. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_59. – EDN: RCLUXH

Abstract. The approximations of the conjugate function on the segment [–1, 1] by Vallée Poussin sums of conjugate rational integral Fourier – Chebyshev operators with restrictions on the number of geometrically different poles are investigated. An integral representation of the corresponding approximations is established. An integral representation of approximations, the estimation of pointwise approximations and uniform approximations with a certain majorant are obtained for a conjugate function with density $(1-x)^{\gamma}$, $\gamma\in(0,1)$. Its asymptotic expression for $n\to\infty$, depending on the parameters of the approximating function, is established. The optimal values of the parameters at which the highest rate of decreasing majorant is provided are found. As a consequence, the estimates of approximations of conjugate function on the segment [–1, 1] by Vallée Poussin sums of conjugate polynomial Fourier – Chebyshev series are found.

Keywords: *conjugate function*, *Fourier – Chebyshev series*, *Vallée Poussin sums*, *function with power singularity*, *pointwise and uniform approximations*, *best approximations*, *asymptotic estimates.*

For citation: *Patseika*, *P.G.* On rational approximations of conjugate function on an interval by conjugate Vallée Poussin sums / P.G. Patseika // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 3 (60). – P. 59–70. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_59 (in Russian). – EDN: RCLUXH

Введение

При решении различных задач математики и ее приложений возникают интегралы с ядром типа Коши, взятые вдоль отрезка действительной оси, которые при помощи различных преобразований приводятся к виду:

$$\hat{f}(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{t-x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\quad x\in[-1,1],\quad(0.1)$$

где интеграл в правой части понимается в смысле главного значения по Коши и для его существования достаточно потребовать, чтобы функция $f(t)$ удовлетворяла на отрезке [–1, 1] условию Липшица любого порядка [1], [2].

Преобразование $\hat{f}(x)$ можно рассматривать также как один из вариантов определения сопряжённой функции с функцией f, заданной на отрезке [–1, 1]. При этом суперпозиция $\hat{f}(\cos\theta)$ определённым образом выражается через функцию, тригонометрически сопряжённую с индуцированной функцией $f(\cos\theta)$, а именно

$$\hat{f}(\cos\theta)=-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}f(\cos\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau-\theta}{2}d\tau,\quad x=\cos\theta.$$

Последнее выражение является хорошо известным [3], [4] представлением сопряженной функции с ядром Гильберта 2π-периодической функции *f*. С этой функцией связано большое количество задач полиномиальной аппроксимации. Рациональная аппроксимация периодической сопряженной функции исследовалась в [5].

В [6] изучены рациональные аппроксимации сопряженной функции вида (0.1) на отрезке [–1, 1] частичными суммами сопряженных рядов Фурье по одной системе ортогональных рациональных функций Чебышёва – Маркова с двумя геометрически различными полюсами. В частности, найдены оценки равномерных приближений, когда плотность *f*(*t*) имеет на отрезке [–1, 1] степенную особенность. Установлено, что специальным выбором полюсов аппроксимирующей функции возможно получить скорость рациональных приближений большего порядка малости в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами.

В 1979 году Е.А. Ровба [7] ввел интегральный оператор на отрезке на основании системы рациональных функций Чебышёва – Маркова, который является обобщением частичных сумм полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва. Пусть задано произвольное множество чисел $\{a_k\}_{k=1}^n$, где a_k либо являются действительными и $|a_k|<1$, либо попарно комплексно-сопряженными. На множестве суммируемых на отрезке [–1, 1] с весом $(1-x^2)^{-1/2}$ функций $f(x)$ рассмотрим рациональный интегральный оператор [7]:

$$s_n(f,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\cos v)\frac{\sin\lambda_n(v,u)}{\sin\frac{v-u}{2}}dv, x=\cos u, \quad (0.2)$$

где

$$\lambda_n(v,u)=\int_u^v\left(\frac{1}{2}+\lambda_n(y)\right)dy,$$

$$\lambda_n(y)=\sum_{k=1}^n\frac{1-|z_k|^2}{1+2|z_k|\cos(y-\arg z_k)+|z_k|^2}, \quad (0.3)$$

$$z_k=\frac{a_k}{1+\sqrt{1-a_k^2}},\ |z_k|<1.$$

Оператор $s_n: f\to\mathbb{R}_n(A)$, где $\mathbb{R}_n(A)$ – множество рациональных функций вида:

$$\frac{p_n(x)}{\prod_{k=1}^n(1+a_kx)},\ p_n(x)\in\mathbb{P}_n,$$

A – множество параметров $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ и $s_n(1,x)\equiv 1$. Если положить $z_k=0, k=1,\ldots,n,$ то $s_n(f,x)$ представляет собой частичную сумму полиномиального ряда Фурье – Чебышёва. Новый метод рациональной аппроксимации на отрезке нашел широкое применение в решении практических задач [8]–[10].

В работе [11] построен сопряженный с оператором (0.2) рациональный интегральный оператор Фурье – Чебышёва

$$\hat{s}_n(f,x)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v)\frac{\cos\frac{v-u}{2}-\cos\lambda_n(v,u)}{\sin\frac{v-u}{2}}dv,$$

$$x=\cos u, \quad (0.4)$$

где $\lambda_n(v,u)$ определена в (0.3).

Его образом является рациональная функция вида

$$\frac{\sqrt{1-x^2}\,p_{n-1}(x)}{\prod_{k=1}^n(1+a_kx)},\ p_{n-1}\in\mathbb{P}_{n-1}.$$

Там же исследованы рациональные приближения на отрезке [–1, 1] сопряженной функции с плотностью $(1-x)^\gamma, \gamma>1/2,$ сопряженным оператором (0.4) с произвольным фиксированным количеством геометрически различных полюсов. Найдены их оптимальные значения, при которых обеспечивается наибольшая скорость убывания равномерных рациональных приближений введенным методом. При этом порядки равномерных рациональных приближений оказываются выше в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами.

Приближения периодических функций усечёнными средними тригонометрических рядов Фурье впервые рассмотрел Валле Пуссен [12], [13]. Изучению аппроксимационных свойств средних Валле Пуссена тригонометрических рядов Фурье на различных функциональных классах посвящено значительное число работ (см., напр., [14]–[19]). Л.М. Абрамов [20] установил асимптотическое выражение функций Лебега сумм Валле Пуссена рядов Фурье – Чебышёва. Впоследствии исследованию аппроксимационных свойств сумм Валле Пуссена рядов Фурье – Чебышёва в равномерной метрике на различных функциональных классах посвящены работы И.М. Ганзбурга [21], А.Ф. Тимана и И.М. Ганзбурга [22], Т.О. Оматаева [23].

Приближения сопряженных 2π-периодических функций суммами Валле Пуссена сопряженных тригонометрических рядов Фурье исследовались в работах А.Д. Щербиной [24], А.Ф. Тимана [25], С.А. Теляковского [16], [26], В.А. Дудаса [27], С.П. Байбородова [28] и других известных специалистов в области теории функций.

В 1977 году В.Н. Русак [29] ввел рациональные операторы типа Валле Пуссена на вещественной оси и исследовал некоторые их аппроксимационные свойства. В работе [30] был построен алгебраический рациональный интегральный оператор типа Валле Пуссена на отрезке и получены оценки равномерных приближений функций, дифференцируемых в смысле Римана – Лиувилля, при специальном выборе полюсов у аппроксимирующей функции. В работе [31] были изучены аппроксимационные свойства рациональных интегральных операторов типа

Валле Пуссена на отрезке $[-1, 1]$ на классах функций ограниченной вариации с заданным модулем непрерывности. В частности, было установлено, что для данного класса функций равномерные приближения имеют порядок наилучшего. В работах [32], [33] авторами были введены суммы Валле Пуссена рационального интегрального оператора Фурье – Чебышёва (0.2) с произвольным фиксированным количеством геометрически различных полюсов и исследованы его аппроксимационные свойства в приближениях на классах интегралов Пуассона и функции Маркова на отрезке $[-1, 1]$ соответственно.

В [34] были введены суммы Фейера сопряженного рационального оператора Фурье – Чебышёва (0.4) с произвольным фиксированным числом геометрически различных полюсов и найдены оценки приближений сопряженной функции с плотностью, имеющей на отрезке $[-1, 1]$ степенную особенность. Установлено, что специальным выбором параметра аппроксимирующей функции можно добиться увеличения скорости рациональных приближений в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами.

Представляет интерес ввести суммы Валле Пуссена сопряженного рационального оператора Фурье – Чебышёва (0.4) с произвольным фиксированным числом геометрически различных полюсов и исследовать их аппроксимационные свойства. В работе устанавливается интегральное представление соответствующих приближений, и изучаются приближения на отрезке $[-1, 1]$ сопряженной функции с плотностью, имеющей степенную особенность. В заключительной части найдены оптимальные значения параметров аппроксимирующей функции, при которых обеспечивается наибольшая скорость убывания мажоранты рациональных приближений изучаемым аппаратом.

1 Суммы Валле Пуссена сопряженных интегральных операторов Фурье – Чебышёва

Пусть q – произвольное натуральное число. A_q есть подмножество параметров A (см. (0.2)) таких, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ровно q различных и кратность каждого параметра равна $m, n = mq, n > q.$ Таким образом, будем вести речь об аппроксимации рациональными функциями с q геометрически различными полюсами в расширенной комплексной плоскости.

Составим сумму:

$$\hat{V}_{2n,q}(f,x) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=m}^{2m} \hat{s}_{kq}(f,x),\ x \in [-1,1],\ m \in \mathbb{N}, \quad (1.1)$$

где $\hat{s}_{kq}(f,x)$ определена в (0.4).

Выражение (1.1) естественно назвать *суммами Валле Пуссена сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва* с q геометрически различными полюсами.

Заметим, что приближения непрерывных функций с характерными особенностями рациональными функциями с фиксированным числом геометрически различных полюсов впервые рассматривались в работах К.Н. Лунгу [35], [36].

Введем следующие обозначения

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}(f,x,A_q) = \hat{f}(x) - \hat{V}_{2n,q}(f,x),\ \ x \in [-1,1],$$

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}(f,A_q) = \| \hat{f}(x) - \hat{V}_{2n,q}(f,x) \|_{C[-1,1]},\ \ n \to \infty.$$

Теорема 1.1. *Для приближений сопряженной функции* (0.1) *на отрезке* $[-1, 1]$ *суммами Валле Пуссена* (1.1) *имеет место интегральное представление*

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) G_{2n}(v,u)\,dv,\ \ x = \cos u, \quad (1.2)$$

где

$$G_{2n}(v,u) =$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{v-u}{2} + \left(2m+\frac{1}{2}\right)\lambda_q^*\right) - \sin\left(\frac{v-u}{2} + \left(m-\frac{1}{2}\right)\lambda_q^*\right)}{4\pi(m+1)\sin\frac{v-u}{2}\sin\frac{\lambda_q^*}{2}},$$

$$n = mq,$$

$$\lambda_q^* = \lambda_q^*(v,u) =$$

$$= \int_u^v \sum_{k=1}^{q} \frac{1-|z_k|^2}{1+2|z_k|\cos(y-\arg z_k)+|z_k|^2}\,dy. \quad (1.3)$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}(f,x) =$$

$$= \frac{1}{m+1}\Big((2m+1)\hat{\delta}_{2n,q}(f,x) - m\hat{\delta}_{n-q,q}(f,x)\Big), \quad (1.4)$$

$$x \in [-1,1],\ k = 0,1,\ldots,$$

где $\hat{\delta}_n(f,x)$ – приближения на отрезке $[-1, 1]$ сопряженной функции (0.1) сопряженным рациональным интегральным оператором Фейера [33] порядка n в случае $q, n = mq,$ геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции. Известно [33], что

$$\hat{\delta}_{n,q}(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) K_n(v,u)\,dv,\ \ x = \cos u,$$

где

$$K_n(v,u) = \frac{1}{8\pi(m+1)\sin\frac{v-u}{2}\sin^2\frac{\lambda_q^*}{2}} \times$$

$$\times\left(\cos\frac{v-u}{2} - \cos\left(\frac{v-u}{2} - \lambda_q^*\right) + \right.$$

$$\left. + \cos\left(\frac{v-u}{2} + m\lambda_q^*\right) - \cos\left(\frac{v-u}{2} + (m+1)\lambda_q^*\right)\right),$$

$$n = mq,$$

$\lambda_q^* = \lambda_q^*(v,u)$ определена в теореме 1.1. Положив в ядре $K_n(v,u)$ последнего интегрального представления $m \mapsto 2m$ и $m \mapsto m-1$, получим последовательно приближения суммами Фейера $\hat{\delta}_{2n,q}(f,x)$ и $\hat{\delta}_{n-q,q}(f,x)$ соответственно. Подставив эти представления в (1.4), после несложных преобразований придем к (1.2). □

В теореме 1.1 положим значения параметров $a_k=0,\ \ k=1,2,\dots,q.$ Тогда $A_q=(0,0,\dots,0)=O$ и величина $\hat{\varepsilon}_{2n,1}(f,x,O)=\hat{\varepsilon}_{2n}^{(0)}(f,x)$ представляет собой приближения сопряженной функции (0.1) суммами Валле Пуссена сопряженного полиномиального ряда Фурье – Чебышёва. Из теоремы 1.1 получаем

***Следствие* 1.1.** *Имеет место интегральное представление*

$$\hat{\varepsilon}_{2n}^{(0)}(f,x)=\frac{1}{4\pi(n+1)}\times$$
$$\times\int_{-\pi}^{\pi}f(\cos v)\frac{\sin(2n+1)(v-u)-\sin n(v-u)}{\sin^2\dfrac{v-u}{2}}dv,$$
$$x=\cos u,\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Для доказательства последнего интегрального представления достаточно в (1.2) положить параметры $a_k=0,\ \ k=1,2,\dots,q.$

2 Приближения сопряженной функции с плотностью, имеющей степенную особенность

Изучим приближения сопряжённой функции с плотностью $f_\gamma(x)=(1-x)^\gamma,\ \ \gamma\in(0,1),$ суммами Валле Пуссена (1.1). Пусть параметры $z_k,\ k=1,2,\dots,q,$ выбраны следующим образом:

$$z_k\mapsto-\alpha_k,\ \ \alpha_k\in[0,1),\ \ k=1,2,\dots,q.$$

***Теорема* 2.1.** *Для приближений сопряженной функции* (0.1) *с плотностью* $f_\gamma(x),\ \gamma\in(0,1)$ *на отрезке* $[-1,\,1]$ *суммами Валле Пуссена* (1.1) *имеют место*:

1) *интегральное представление*:

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}(f_\gamma,x,A_q)=-\frac{2^{1-\gamma}\sin\pi\gamma}{\pi(m+1)}\times$$
$$\times\int_0^1\frac{(1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}}{\sqrt{1-2t\cos u+t^2}}\Omega_n(t,x)\sin\psi_n(x,t)\omega_q^m(t)\,dt, \tag{2.1}$$

где

$$\Omega_n(t,x)=\sqrt{\frac{1-2\omega_q^{m+1}(t)M_{q(m+1)}(x)+\omega_q^{2(m+1)}(t)}{1-2\omega_q(t)M_q(x)+\omega_q^2(t)}},$$

$$\psi_n(x,t)=\arg\frac{\xi\omega_q^m(\xi)}{1-t\xi}+\arg\frac{1-(\omega_q(\xi)\omega_q(t))^{m+1}}{1-\omega_q(\xi)\omega_q(t)},$$

$$\omega_q(t)=\prod_{k=1}^{q}\frac{t-\alpha_k}{1-\alpha_k t},\ \ \xi=e^{iu},$$

$$M_q(x)=\frac{1}{2}\left(\omega_q(\xi)+\overline{\omega_q(\xi)}\right),$$

– рациональная функция Чебышёва – Маркова порядка q;

2) *поточечная оценка*

$$|\hat{\varepsilon}_{2n,q}(f_\gamma,x,A_q)|\le$$
$$\le\frac{2^{1-\gamma}\sin\pi\gamma}{\pi(m+1)}\int_0^1\frac{(1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}}{\sqrt{1-2tx+t^2}}\Omega_n(t,x)\,|\omega_q(t)|^m\,dt, \tag{2.2}$$
$$x\in[-1,1];$$

3) *равномерная оценка*

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}(f_\gamma,A_q)\le\hat{\varepsilon}_{2n,q}^{*}(f_\gamma,A_q),\ \ n\in\mathbb{N}, \tag{2.3}$$

где

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}^{*}(f_\gamma,A_q)=\frac{2^{1-\gamma}\sin\pi\gamma}{\pi(m+1)}\times$$
$$\times\int_0^1(1-t)^{2\gamma-1}t^{-\gamma}\,\frac{1-|\omega_q(t)|^{m+1}}{1-|\omega_q(t)|}\,|\omega_q(t)|^m\,dt. \tag{2.4}$$

Доказательство. Воспользуемся соотношением (1.4). Известно [32], что для приближений сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x)$ суммами Фейера сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва имеет место интегральное представление

$$\hat{\delta}_{n,q}(f_\gamma,x,A_q)=\frac{-\sin\pi\gamma}{2^\gamma\pi i(m+1)}\times$$
$$\times\int_0^1(1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}\left[\frac{\xi(1-(\omega_q(\xi)\omega_q(t))^{m+1})}{(1-t\xi)(1-\omega_q(\xi)\omega_q(t))}-\right.$$
$$\left.-\frac{1-(\overline{\omega_q(\xi)}\omega_q(t))^{m+1}}{(\xi-t)(1-\overline{\omega_q(\xi)}\omega_q(t))}\right]dt,\ \ n=mq,\ x=\cos u.$$

Положив в последнем интегральном представлении последовательно $m\mapsto2m$ и $m\mapsto m-1$ и подставив найденные соотношения в (1.4), придем к представлению

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}(f_\gamma,x,A_q)=\frac{-\sin\pi\gamma}{2^\gamma\pi i(m+1)}\int_0^1(1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}\times$$
$$\times\left[\frac{\xi((\omega_q(\xi)\omega_q(t))^m-(\omega_q(\xi)\omega_q(t))^{2m+1})}{(1-t\xi)(1-\omega_q(\xi)\omega_q(t))}-\right.$$
$$\left.-\frac{(\overline{\omega_q(\xi)}\omega_q(t))^m-(\overline{\omega_q(\xi)}\omega_q(t))^{2m+1}}{(\xi-t)(1-\overline{\omega_q(\xi)}\omega_q(t))}\right]dt.$$

Заметив, что выражения в квадратных скобках подынтегрального выражения являются взаимно комплексно-сопряженными, чтобы прийти к (2.1) достаточно выполнить соответствующие преобразования и учесть, что [37, С. 50]

$$M_q(x)=(1/2)(\omega_q(\xi)+\overline{\omega_q(\xi)}),$$
$$\xi=e^{iu},\ \ x=\cos u,$$

– рациональная косинус-дробь Чебышёва – Маркова порядка q.

Соотношение (2.2) легко следует из интегрального представления (2.1).

Для доказательства третьего утверждения теоремы 2.1 в (2.2) воспользуемся оценкой

$$\Omega_n(t,x)=\sqrt{\frac{1-2\omega_q^{m+1}(t)M_{q(m+1)}(x)+\omega_q^{2(m+1)}(t)}{1-2\omega_q(t)M_q(x)+\omega_q^2(t)}}\le$$

$$\le \frac{1-|\omega_q(t)|^{m+1}}{1-|\omega_q(t)|},\ t\in[0,1],\ m\in\mathbb{N}.$$

Теорема 2.1 доказана. □

В теореме 2.1 положим значение параметров $\alpha_k = 0, k = 1,2,\dots,q.$ Тогда

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}(f_\gamma, x, O) = \hat{\varepsilon}_{2n}^{(0)}(f_\gamma, x)$$

представляют собой приближения сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x)$ на отрезке [–1, 1] суммами Валле Пуссена сопряженного полиномиального ряда Фурье – Чебышёва. Отсюда получаем

***Следствие* 2.1.** *Для приближений суммами Валле Пуссена сопряженного полиномиального ряда Фурье – Чебышёва сопряженной функции с плотностью* $f_\gamma(x)$, $\gamma\in(0,+\infty)\setminus\mathbb{N}$, *на отрезке* [–1, 1] *имеют место*:

1) *интегральное представление*:

$$\hat{\varepsilon}_{2n}^{(0)}(f_\gamma, x) = -\frac{2^{1-\gamma}\sin\pi\gamma}{\pi(n+1)}\int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma}t^{n-\gamma}}{(1-2tx+t^2)^2}p_n(t,x)dt,$$
$$x\in[-1,1];$$

где

$$p_n(t,x) = \sin(n+1)u - 2t\sin nu + t^2\sin(n-1)u -$$
$$-t^{n+1}\sin(2n+2)u + 2t^{n+2}\sin(2n+1)u - t^{n+3}\sin 2nu,$$
$$x=\cos u;$$

2) *поточечная оценка*

$$|\hat{\varepsilon}_{2n}^{(0)}(f_\gamma, x)| \le$$
$$\le \frac{2^{1-\gamma}|\sin\pi\gamma|}{\pi(n+1)}\int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma}t^{n-\gamma}\sqrt{1-2t^{n+1}T_{n+1}(x)+t^{2n+2}}}{1-2tx+t^2}dt,$$
$$x\in[-1,1],$$

где $T_n(x) = \cos(n\arccos x)$ – полином Чебышёва первого рода степени *n*;

3) *равномерная оценка*:

$$\hat{\varepsilon}_{2n}^{(0)}(f_\gamma) \le \frac{2^{1-\gamma}|\sin\pi\gamma|}{\pi(n+1)}\int_0^1 (1-t)^{2\gamma-1}t^{-\gamma}\frac{t^n-t^{2n+1}}{1-t}dt,$$
$$n\in\mathbb{N}.$$

Утверждения последнего следствия легко получить если положить в теореме 2.1 значения всех параметров равными нулю. Отметим, что в полиномиальном случае ограничения на параметр γ, $\gamma\in(0,1)$, могут быть сняты в предположении достаточно большого n, $n+1>\gamma$.

3 Асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений

Исследуем асимптотическое поведение величины (2.4) при $m\to\infty$. Для решения этой задачи в правой части (2.4) выполним замену переменного по формуле $t=(1-u)/(1+u)$, $dt=-2du/(1+u)^2$. Тогда

$$\hat{\varepsilon}_{2n}^{*}(f_\gamma, A_q) = \tag{3.1}$$
$$= \frac{2^{\gamma+1}\sin\pi\gamma}{\pi(m+1)}\int_0^1 \mu_\gamma(u)\frac{|\pi_q(u)|^m - |\pi_q(u)|^{2m+1}}{1-|\pi_q(u)|}du,\ n\in\mathbb{N},$$

где $\mu_\gamma(u) = \dfrac{u^{2\gamma-1}}{(1+u)(1-u^2)^\gamma}$, $\pi_q(u) = \prod_{k=1}^{q}\dfrac{\beta_k-u}{\beta_k+u}$,

$$\beta_k = \frac{1-\alpha_k}{1+\alpha_k},\ \beta_k\in(0,1].$$

Отметим, что в рассматриваемом нами случае для каждого значения $n\in\mathbb{N}$ может выбираться соответствующий набор параметров $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_q)$, то есть вообще говоря $\alpha_k=\alpha_k(m)$, $k=1,2,\dots,q$. В связи с этим будем полагать, что выполняется следующее условие

$$\lim_{m\to\infty} m(1-\alpha_k) = \infty,\ k=1,2,\dots,q, \tag{3.2}$$

и учитывать его в дальнейших рассуждениях. Без нарушения общности можно полагать параметры β_k, $k=1,2,\dots,q$, упорядоченными следующим образом: $0<\beta_q\le\dots\le\beta_1\le 1$.

***Теорема* 3.1.** *Для мажоранты равномерных приближений сопряженной функции с плотностью* $f_\gamma(x)$, $\gamma\in(0,1)$, *суммами Валле Пуссена* (1.1) *при* $m\to\infty$ *справедливы асимптотические равенства*:

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}^{*}(f_\gamma, A_q) \sim$$
$$\sim \frac{\sin\pi\gamma}{\pi}\begin{cases} \dfrac{2^{1-\gamma}\Gamma(2\gamma)(2^{1-2\gamma}-1)}{(1-2\gamma)\left(\sum\limits_{k=1}^{q}\dfrac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma}(m+1)^{2\gamma}} + \Phi_n^{(\gamma)}(A_q), \\ \gamma\in(0;0,5), \\ \dfrac{\sqrt{2}\ln 2}{\sum\limits_{k=1}^{q}\dfrac{1}{\beta_k}(m+1)} + \Phi_n^{(\frac{1}{2})}(A_q),\ \gamma=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2^{2-3\gamma}\Gamma(2\gamma)(2^{2\gamma-1}-1)}{(2\gamma-1)\left(\sum\limits_{k=1}^{q}\dfrac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma}(m+1)^{2\gamma}} + \Phi_n^{(\gamma)}(A_q), \\ \gamma\in(0,5;1), \end{cases} \tag{3.3}$$

где

$$\Phi_n^{(\gamma)}(A_q) = \frac{2^{\gamma+\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}{(m+1)^{\frac{3}{2}}}\times \tag{3.5}$$
$$\times\sum_{j=1}^{q-1}\frac{b_j^{2\gamma-\frac{3}{2}}|\pi_q(b_j)|^m}{(1-b_j^2)^\gamma(1+b_j)(1-|\pi_q(b_j)|)\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{q}\dfrac{\beta_k}{(\beta_k^2-b_j^2)^2}}} +$$
$$+\frac{\Gamma(1-\gamma)}{2^{1-\gamma}(m+1)^{2-\gamma}\left(1-\prod\limits_{k=1}^{q}\dfrac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{q}\dfrac{\beta_k}{1-\beta_k^2}\right)^{1-\gamma}}\times$$

$$\times\left(\prod_{k=1}^{q}\frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right)^m,$$

b_j *– единственный корень уравнения*

$$\sum_{k=1}^{q}\frac{\beta_k}{u^2-\beta_k^2}=0, \qquad (3.5)$$

на интервале (β_{j+1},β_j), $j=1,\ldots,q-1$,

$\Gamma(\cdot)$ *– гамма-функция Эйлера,* $n=mq$.

Доказательство. Введем следующие обозначения

$$I_n^{(1)}(A_q)=\int_0^{\beta_q}\mu_\gamma(u)\frac{\pi_q^m(u)-\pi_q^{2m+1}(u)}{1-\pi_q(u)}du,$$

$$I_n^{(2)}(A_q)=\sum_{j=1}^{q-1}\int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j}\mu_\gamma(u)\frac{|\pi_q(u)|^m-|\pi_q(u)|^{2m+1}}{1-|\pi_q(u)|}du,$$

$$I_n^{(3)}(A_q)=\int_{\beta_1}^{1}\mu_\gamma(u)\frac{|\pi_q(u)|^m-|\pi_q(u)|^{2m+1}}{1-|\pi_q(u)|}.$$

Тогда из равенства (3.1) находим, что

$$\hat{\varepsilon}^*_{2n,q}(f_\gamma,A_q)=$$

$$=\frac{2^{\gamma+1}\sin\pi\gamma}{\pi(m+1)}[I_n^{(1)}(A_q)+I_n^{(2)}(A_q)+I_n^{(3)}(A_q)], \quad (3.6)$$

$$n\in\mathbb{N}.$$

Изучим по отдельности асимптотическое поведение при $m\to\infty$ каждого из интегралов справа. Результаты сформулируем в виде трех лемм.

Лемма 3.1. *При* $m\to\infty$ *справедливы асимптотические равенства*

$$I_n^{(1)}(A_q)\sim \qquad (3.7)$$

$$\sim\begin{cases}\dfrac{\Gamma(2\gamma)(2^{1-2\gamma}-1)(m+1)^{1-2\gamma}}{(1-2\gamma)\left(2\sum\limits_{k=1}^{q}\dfrac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma}},\ \gamma\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right),\\[2ex] \dfrac{\ln 2}{2\sum\limits_{k=1}^{q}\dfrac{1}{\beta_k}},\ \gamma=\dfrac{1}{2},\\[2ex] \dfrac{\Gamma(2\gamma)(2^{2\gamma-1}-1)}{2^{2\gamma-1}(2\gamma-1)\left(2\sum\limits_{k=1}^{q}\dfrac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma}(m+1)^{2\gamma-1}},\gamma\in\left(\dfrac{1}{2},1\right),\end{cases}$$

где $\Gamma(\cdot)$ *– гамма-функция Эйлера.*

Доказательство. Воспользуемся методами исследования асимптотического поведения интегралов, предложенными в [38, с. 375]. Продифференцировав интеграл $I_n^{(1)}(A_q)$ по параметру m, получим

$$\frac{\partial I_n^{(1)}(A_q)}{\partial m}=\int_0^{\beta_q}\mu_\gamma(u)\frac{\ln\pi_q(u)}{1-\pi_q(u)}[\mathrm{e}^{mS(u)}-2\mathrm{e}^{(2m+1)S(u)}]du,$$

$$S(u)=\sum_{k=1}^{q}\ln\frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}.$$

Для исследования асимптотического поведения интеграла справа в последнем равенстве воспользуемся методом Лапласа [39], [40]. Функция $S(u)$ убывает на отрезке $[0,\beta_q]$, поскольку $S'(u)=-2\sum_{k=1}^{q}\beta_k/(\beta_k^2-u^2)<0$, и, следовательно, достигает своего максимального значения при $u=0$. Учитывая разложение в ряд Тейлора

$$S(u)=-2u\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}+o(u),$$

и асимптотическое равенство

$$\mu_\gamma(u)\frac{\ln\pi_q(u)}{1-\pi_q(u)}\sim -u^{2\gamma-1},$$

справедливые при $u\to 0$, для некоторого достаточно малого $\varepsilon>0$ и $m\to\infty$ будем иметь

$$\frac{\partial I_n^{(1)}(A_q)}{\partial m}\sim$$

$$\sim -\int_0^{\varepsilon}u^{2\gamma-1}\mathrm{e}^{-2mu\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}}du+2\int_0^{\varepsilon}u^{2\gamma-1}\mathrm{e}^{-2(2m+1)u\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}}du.$$

Выполнив в первом интеграле замену переменного $2mu\sum_{k=1}^{q}1/\beta_k\mapsto u$, а во втором замену переменного $2(2m+1)u\sum_{k=1}^{q}1/\beta_k\mapsto u$, получим

$$\frac{\partial I_n^{(1)}(A_q)}{\partial m}\sim\frac{-1}{\left(2\sum\limits_{k=1}^{q}\dfrac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma}}\left(\frac{1}{m^{2\gamma}}\int_0^{2\varepsilon m\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}}u^{2\gamma-1}\mathrm{e}^{-u}du-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{(2m+1)^{2\gamma}}\int_0^{2\varepsilon(2m+1)\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}}u^{2\gamma-1}\mathrm{e}^{-u}du\right),\ m\to\infty.$$

Принимая во внимание, что

$$\int_0^{+\infty}u^{2\gamma-1}\mathrm{e}^{-u}du=\Gamma(2\gamma),\ 2\gamma>0,$$

при $m\to\infty$ будем иметь

$$\frac{\partial I_n^{(1)}(A_q)}{\partial m}\sim\frac{-\Gamma(2\gamma)}{\left(2\sum\limits_{k=1}^{q}\dfrac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma}}\left[\frac{1}{m^{2\gamma}}-\frac{2}{(2m+1)^{2\gamma}}\right],m\to\infty.$$

Чтобы вернуться к асимптотическому выражению величины $I_n^{(1)}(A_q)$, проинтегрируем правую и левую части последнего асимптотического равенства по параметру m. Выполнив указанное действие, придем к (3.7) для соответствующих значений параметра γ, $\gamma\in(0,1)$. □

Лемма 3.2. *При* $m\to\infty$ *справедливо асимптотическое равенство*:

$$I_n^{(2)}(A_q)\sim \qquad (3.8)$$

$$\sim \sqrt{\frac{\pi}{2m}} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{b_j^{2\gamma - \frac{3}{2}} |\pi_q(b_j)|^m}{(1-b_j^2)^\gamma (1+b_j)(1-|\pi_q(b_j)|) \sqrt{\sum_{k=1}^{q} \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 - b_j^2)^2}}},$$

где b_j, $j = 1, 2, \ldots, q-1$, *определены в формулировке теоремы* 3.1.

Доказательство. Запишем

$$I_n^{(2)}(A_q) = \sum_{j=1}^{q-1} \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{\mu_\gamma(u)}{1-|\pi_q(u)|} \left[e^{mS(u)} - e^{(2m+1)S(u)} \right] du,$$

где

$$S(u) = \sum_{k=1}^{j} \ln \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} + \sum_{k=j+1}^{q} \ln \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k}.$$

Поскольку

$$S'(u) = \sum_{k=1}^{j} \frac{-2\beta_k}{\beta_k^2 - u^2} + \sum_{k=j+1}^{q} \frac{2\beta_k}{u^2 - \beta_k^2},$$

$$S''(u) = \sum_{k=1}^{j} \frac{-4\beta_k u}{(\beta_k^2 - u^2)^2} + \sum_{k=j+1}^{q} \frac{-4\beta_k u}{(u^2 - \beta_k^2)^2} < 0,$$

$$u \in (\beta_{j+1}, \beta_j),$$

причем $\lim\limits_{u \to \beta_{j+1}} S'(u) = +\infty$, $\lim\limits_{u \to \beta_j} S'(u) = -\infty$, то заключаем, что существует внутренняя точка $b_j \in (\beta_{j+1}, \beta_j)$, в которой функция $S(u)$ достигает на этом интервале максимума и $S'(b_j) = 0$. Используя разложения

$$S(u) = \sum_{k=1}^{j} \ln \frac{\beta_k - b_j}{\beta_k + b_j} + \sum_{k=j+1}^{q} \ln \frac{b_j - \beta_k}{b_j + \beta_k} -$$

$$-2b_j (u - b_j)^2 \sum_{k=1}^{q} \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 - b_j^2)^2} + o((u-b_j)^2),$$

и
$$\frac{\mu_\gamma(u)}{1-|\pi_q(u)|} = \frac{\mu_\gamma(b_j)}{1-|\pi_q(b_j)|} + O((u-b_j)),$$

справедливые при $u \to b_j$, для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$ и $m \to \infty$ находим, что

$$I_n^{(2)}(A_q) \sim \sum_{j=1}^{q-1} \frac{\mu_\gamma(b_j)}{1-|\pi_q(b_j)|} \times$$

$$\times \left(|\pi_q(b_j)|^m \int_{b_j-\varepsilon}^{b_j+\varepsilon} e^{-2b_j m (u-b_j)^2 \sum_{k=1}^{q} \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 - b_j^2)^2}} du - \right. \quad (3.9)$$

$$\left. - |\pi_q(b_j)|^{2m+1} \int_{b_j-\varepsilon}^{b_j+\varepsilon} e^{-2b_j (2m+1)(u-b_j)^2 \sum_{k=1}^{q} \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 - b_j^2)^2}} du \right).$$

Выполнив в каждом из интегралов под знаком круглых скобок последовательно замену переменного $u - b_j \mapsto u$, затем для каждого из интегралов соответствующие замены переменных

$$2b_j m \sum_{k=1}^{q} \beta_k / (\beta_k^2 - b_j^2)^2 u^2 \mapsto t^2 \text{ и}$$

$$2b_j (2m+1) \sum_{k=1}^{q} \beta_k / (\beta_k^2 - b_j^2)^2 u^2 \mapsto t^2$$

и учитывая, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, из (3.9) при $m \to \infty$ будем иметь

$$I_n^{(2)}(A_q) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{\mu_\gamma(b_j) b_j^{-1/2}}{(1-|\pi_q(b_j)|) \sqrt{\sum_{k=1}^{q} \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 - b_j^2)^2}}} \times$$

$$\times \left(\frac{|\pi_q(b_j)|^m}{\sqrt{m}} - \frac{|\pi_q(b_j)|^{2m+1}}{\sqrt{2m+1}} \right).$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{|\pi_q(b_j)|^m}{\sqrt{m}} - \frac{|\pi_q(b_j)|^{2m+1}}{\sqrt{2m+1}} =$$

$$= \frac{|\pi_q(b_j)|^m}{\sqrt{m}} \left(1 - \sqrt{\frac{m}{2m+1}} |\pi_q(b_j)|^{m+1} \right) =$$

$$= \frac{|\pi_q(b_j)|^m}{\sqrt{m}} (1 + o(1)),$$

поскольку $|\pi_q(b_j)|^m \to 0$ при $m \to \infty$, из последнего асимптотического равенства получим соотношение (3.8). □

Лемма 3.3. *При* $m \to \infty$ *справедливо асимптотическое равенство*:

$$I_n^{(3)}(A_q) \sim \quad (3.10)$$

$$\sim \frac{\Gamma(1-\gamma)}{4\left(1 - \prod_{k=1}^{q} \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right) \left(m \sum_{k=1}^{q} \frac{\beta_k}{1-\beta_k^2}\right)^{1-\gamma}} \left(\prod_{k=1}^{q} \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k} \right)^m.$$

Доказательство. Интеграл $I_n^{(3)}(A_q)$ представим в виде

$$I_n^{(3)}(A_q) = \int_{\beta_1}^{1} \frac{\mu_\gamma(u)}{1-|\pi_q(u)|} \left[e^{mS(u)} - e^{(2m+1)S(u)} \right] du,$$

$$S(u) = \sum_{k=1}^{q} \ln \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k}.$$

Для исследования асимптотического поведения интеграла, как и прежде, воспользуемся методом Лапласа [39], [40]. Поскольку

$$S'(u) = 2 \sum_{k=1}^{q} \beta_k / (u^2 - \beta_k^2) > 0,$$

то заключаем, что функция $S(u)$ возрастает при $u \in [\beta_1, 1]$ и, значит, достигает своего максимального значения при $u = 1$. Раскладывая функцию $S(u)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $u = 1$:

$$S(u) = \sum_{k=1}^{q} \ln \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k} + 2 \sum_{k=1}^{q} \frac{\beta_k}{1-\beta_k^2} (u-1) + o(u-1),$$

$$u \to 1,$$

и отмечая, что

$$\frac{\mu_\gamma(u)}{1-|\pi_q(u)|} \sim \frac{(1-u)^{-\gamma}}{2^{1+\gamma} \left(1 - \prod_{k=1}^{q} \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k} \right)}, \quad u \to 1,$$

для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$ и $m \to \infty$ находим

$$I_n^{(3)}(A_q) \sim \frac{1}{2^{1+\gamma}\left(1-\prod_{k=1}^{q}\frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right)}\left(\prod_{k=1}^{q}\frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right)^m \times$$

$$\times\left[\int_{1-\varepsilon}^{1}(1-u)^{-\gamma}e^{2m\sum_{k=1}^{q}\frac{\beta_k}{1-\beta_k^2}(u-1)}du -\right.$$

$$\left.-\left(\prod_{k=1}^{q}\frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right)^{m+1}\int_{1-\varepsilon}^{1}(1-u)^{-\gamma}e^{2(2m+1)\sum_{k=1}^{q}\frac{\beta_k}{1-\beta_k^2}(u-1)}du\right].$$

Выполнив в интегралах справа последовательно замены переменных по формуле $1-u \mapsto u,$ затем для первого интеграла замену

$$2m\sum_{k=1}^{q}\beta_k/(1-\beta_k^2)u \mapsto u,$$

а для второго интеграла замену

$$2(2m+1)\sum_{k=1}^{q}\beta_k/(1-\beta_k^2)u \mapsto u,$$

придем к асимптотическому равенству

$$I_n^{(3)}(A_q) \sim$$

$$\sim \frac{\Gamma(1-\gamma)}{4\left(1-\prod_{k=1}^{q}\frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right)\left(m\sum_{k=1}^{q}\frac{\beta_k}{1-\beta_k^2}\right)^{1-\gamma}}\left(\prod_{k=1}^{q}\frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right)^m \times$$

$$\times\left[1-\left(\frac{m}{2m+1}\right)^{1-\gamma}\left(\prod_{k=1}^{q}\frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right)^{m+1}\right],\ m \to \infty.$$

Чтобы из последнего асимптотического равенства прийти к (3.10), достаточно заметить, что с учетом условия (3.2)

$$\left(\prod_{k=1}^{q}\frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right)^{m+1} \sim e^{-2(m+1)\sum_{k=1}^{q}\beta_k} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0. \qquad \square$$

Вернемся к доказательству теоремы 3.1. Из равенства (3.6) с учетом полученных асимптотических равенств (3.7), (3.8) и (3.10) придем к соотношениям (3.3) и (3.4). Доказательство теоремы 3.1 завершено. □

***Следствие* 3.3.** *Для равномерных приближений сопряженной функции с плотностью* $f_\gamma(x),\quad \gamma \in (0,+\infty)\setminus\mathbb{N},$ *суммами Валле Пуссена сопряженного ряда Фурье – Чебышёва справедливы оценки сверху*

$$\hat{\varepsilon}_{2n}^{(0)}(f_\gamma) \le \frac{|\sin\pi\gamma|}{\pi}\times\begin{cases}\dfrac{2^{1-\gamma}\Gamma(2\gamma)(2^{1-2\gamma}-1)}{(1-2\gamma)(n+1)^{2\gamma}}, \gamma\in(0;0.5),\\ \dfrac{\sqrt{2}\ln 2}{n+1},\ \gamma = 1/2,\\ \dfrac{2^{2-3\gamma}\Gamma(2\gamma)(2^{2\gamma-1}-1)}{(2\gamma-1)(n+1)^{2\gamma}}, \gamma > 0,5.\end{cases}$$

Доказательство. Следует непосредственно из (3.3) если положить $\alpha_k = 0, k = 1,2\ldots,q.$ □

Обратим внимание, что в отличие от результатов, полученных в теореме 3.1, в следствии 3.3 ограничения на параметр γ снимаются для достаточно большого $n,\ n+1>\gamma.$

4 Наилучшая мажоранта равномерных приближений сопряженной функции суммами Валле Пуссена

Представляет интерес минимизировать правые части соотношений (3.3) посредством выбора оптимального для каждой задачи набора параметров $A_q^* = (a_1^*,\ldots,a_q^*).$ Другими словами, найти наилучшую мажоранту равномерных приближений сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x)$ на отрезке [–1, 1] суммами Валле Пуссена (1.1). Для реализации поставленной задачи положим

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}(f_\gamma) = \inf_{A_q}\ \hat{\varepsilon}_{2n,q}(f_\gamma, A_q),$$

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}^*(f_\gamma) = \inf_{A_q}\ \hat{\varepsilon}_{2n,q}^*(f_\gamma, A_q).$$

Отметим, что из (2.3) следует справедливость соотношения $\hat{\varepsilon}_{2n,q}(f_\gamma) \le \hat{\varepsilon}_{2n,q}^*(f_\gamma),\ n\in\mathbb{N}.$ Исходя из этого неравенства, дальше будем иметь дело только с его правой частью.

***Теорема* 4.1.** *Справедливы асимптотические равенства*:

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}^*(f_\gamma) \sim \nu(\gamma,q)\left(\frac{\ln^{2q-1}n}{n^{2q}}\right)^{2\gamma},\ n\to\infty, \quad (4.1)$$

где

$$\nu(\gamma,q) =$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2^{1+\gamma}\Gamma(2\gamma)(2^{1-2\gamma}-1)(q^{2q+1}\gamma^{2q-1})^{2\gamma}[(q-1)!]^{4\gamma}}{1-2\gamma},\\ \gamma\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right),\\ \hline \sqrt{2}\ln 2\cdot q^{2q+1}\dfrac{[(q-1)!]^2}{2^{2q-2}},\ \gamma=\dfrac{1}{2},\\ \hline \dfrac{2^{2-\gamma}\Gamma(2\gamma)(2^{2\gamma-1}-1)(q^{2q+1}\gamma^{2q-1})^{2\gamma}[(q-1)!]^{4\gamma}}{2\gamma-1},\\ \gamma\in\left(\dfrac{1}{2},1\right).\end{cases}$$

Доказательство. Очевидно, что при постоянных значениях параметров $\beta_k,\ k=1,2,\ldots,q,$ порядок стремления к нулю правой части асимптотических равенств (3.3) не будет отличаться от полиномиального, определенного в следствии 3.3. Пусть набор параметров задан следующим образом:

$$\alpha_k = \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}, \beta_k = c_k\left(\frac{\ln m}{m}\right)^{2k-1}, k=1,2,\ldots,q, \quad (4.2)$$

где c_k – коэффициенты, подлежащие определению. Изучим асимптотическое поведение правой части соотношения (3.3) в этом случае. Прежде всего исследуем величину (3.4). Для выполнения этой задачи необходимо выяснить характер параметров b_j, $j=1,2,\ldots,q-1$, входящих в нее и являющихся корнями уравнения (3.5). Докажем вспомогательное утверждение.

***Лемма* 4.1.** *В условиях* (4.2) *на параметры* β_k, $k=1,2,\ldots,q$, *для корней уравнения* (3.5) *справедливо асимптотическое равенство*

$$b_j \sim \sqrt{c_j c_{j+1}}\left(\frac{\ln m}{m}\right)^{2j}, \quad j=1,2,\ldots,q-1, \quad m\to\infty.$$

Доказательство. Уравнение (3.5) представим в виде

$$\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{\beta_k(1-(u/\beta_k))^2}=\frac{1}{u^2}\sum_{k=j+1}^{q}\frac{\beta_k}{1-(\beta_k/u)^2}, \quad j=1,\ldots,q-1. \tag{4.3}$$

Для каждого фиксированного $j=1,2,\ldots,q-1$ корень $b_j\in(\beta_{j+1},\beta_j)$ удовлетворяет неравенствам

$$c_{j+1}\left(\frac{\ln m}{m}\right)^{2j+1}<b_j<c_j\left(\frac{\ln m}{m}\right)^{2j-1}, \quad j=1,\ldots,q-1.$$

Отсюда при заданных значениях параметров β_k, $k=1,2,\ldots,q$, и $m\to\infty$ находим, что слева в (4.3)

$$\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{\beta_k(1-(b_j/\beta_k))^2}\sim\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{\beta_k}\sim\frac{1}{c_j}\left(\frac{m}{\ln m}\right)^{2j-1}.$$

При этом справа в (4.3) устанавливаем, что

$$\frac{1}{b_j^2}\sum_{k=j+1}^{q}\frac{\beta_k}{1-(b_j/\beta_k)^2}\sim\frac{1}{b_j^2}\sum_{k=j+1}^{q}\beta_k\sim\frac{c_{j+1}}{b_j^2}\left(\frac{\ln m}{m}\right)^{2j+1}, \quad m\to\infty.$$

Подставив два последних асимптотических равенства в (4.3) получим

$$\frac{1}{c_j}\left(\frac{m}{\ln m}\right)^{2j-1}\sim\frac{c_{j+1}}{b_j^2}\left(\frac{\ln m}{m}\right)^{2j+1}, \quad m\to\infty,$$

откуда следует утверждение леммы 4.1. □

Вернемся к доказательству теоремы 4.1. Используя результаты последней леммы, нетрудно показать, что

$$|\pi_q(b_j)|\sim e^{-4\sqrt{\frac{c_{j+1}}{c_j}}\frac{\ln m}{m}}, \quad j=1,\ldots,q-1, \quad m\to\infty.$$

Отсюда сразу же следует, что

$$1-|\pi_q(b_j)|\sim 4\sqrt{\frac{c_{j+1}}{c_j}}\frac{\ln m}{m}, \quad |\pi_q(b_j)|^m\sim\frac{1}{m^{4\sqrt{\frac{c_{j+1}}{c_j}}}}, \quad m\to\infty.$$

Несложными рассуждениями приходим к асимптотическому соотношению

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{q}\frac{\beta_k}{(\beta_k^2-b_j^2)^2}}\sim\frac{\sqrt{c_{j+1}}}{c_jc_{j+1}}\left(\frac{m}{\ln m}\right)^{3j-\frac{1}{2}}, \quad j=1,2,\ldots,q-1, \quad m\to\infty.$$

Из легко проверяемого асимптотического равенства

$$\prod_{k=1}^{q}\frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\sim e^{-2c_1\frac{\ln m}{m}}, \quad m\to\infty,$$

нетрудно получить, что:

$$1-\prod_{k=1}^{q}\frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\sim 2c_1\frac{\ln m}{m}, \quad \left(\prod_{k=1}^{q}\frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right)^m\sim\frac{1}{m^{2c_1}}, \quad m\to\infty;$$

$$\sum_{k=1}^{q}\frac{\beta_k}{1-\beta_k^2}\sim c_1\frac{\ln m}{m}, \quad m\to\infty.$$

Учитывая сказанное, для величины (3.4) придем к асимптотическому выражению

$$\Phi_n^{(\gamma)}(A_q)\sim 2^{2^{\frac{1}{2}+\gamma}}\sqrt{\pi}\sum_{j=1}^{q-1}\frac{(c_jc_{j+1})^{\frac{4j\gamma-3j}{2}}c_j^{\frac{3}{2}}(\ln m)^{4j\gamma-\frac{3}{2}}}{m^{4j\gamma+4\sqrt{\frac{c_{j+1}}{c_j}}}}+ \frac{\Gamma(1-\gamma)}{(2c_1\ln m)^{2-\gamma}m^{2c_1}}, \quad m\to\infty.$$

При найденном асимптотическом равенстве, обратимся к соотношению (3.3). Будем различать случаи. Пусть $\gamma\in(0,1/2)$. В этом случае из (3.3) находим

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}^{*}(f_\gamma,A_q)\sim\frac{2^{1-\gamma}\Gamma(2\gamma)(2^{1-2\gamma}-1)}{(1-2\gamma)\left(\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma}(m+1)^{2\gamma}}+\Phi_n^{(\gamma)}(A_q).$$

Подставив в первое слагаемое заданные параметры β_k, $k=1,2,\ldots,q$, придем к асимптотическому равенству

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}^{*}(f_\gamma,A_q)\sim\frac{2^{1-\gamma}\Gamma(2\gamma)(2^{1-2\gamma}-1)c_q^{2\gamma}(\ln m)^{2\gamma(2q-1)}}{(1-2\gamma)m^{4q\gamma}}+ 2^{2^{\frac{1}{2}+\gamma}}\sqrt{\pi}\sum_{j=1}^{q-1}\frac{(c_jc_{j+1})^{\frac{4j\gamma-3j}{2}}c_j^{\frac{3}{2}}(\ln m)^{4j\gamma-\frac{3}{2}}}{m^{4j\gamma+4\sqrt{\frac{c_{j+1}}{c_j}}}}+ \frac{\Gamma(1-\gamma)}{(2c_1\ln m)^{2-\gamma}m^{2c_1}}, \quad m\to\infty.$$

Найдем такие коэффициенты c_k, $k=1,2,\ldots,q$, при которых величина справа будет асимптотически минимальной. Принципиальным условием для этого является равенство показателей степеней при m. Другими словами, параметры c_k, $k=1,2,\ldots,q$, должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} 4q\gamma=4j\gamma+4\sqrt{\dfrac{c_{j+1}}{c_j}}, \quad j=1,\ldots,q-1, \\ 4q\gamma=2c_1. \end{cases} \tag{4.4}$$

Заметим, что в этом случае асимптотическое поведение величины $\hat{\varepsilon}_{2n,q}^{*}(f_\gamma,A_q)$ будет определяться первым слагаемым. Другими словами,

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}^{*}(f_\gamma,A_q)=\frac{2^{1-\gamma}\Gamma(2\gamma)(2^{1-2\gamma}-1)c_q^{2\gamma}(\ln m)^{2\gamma(2q-1)}}{(1-2\gamma)m^{4q\gamma}}+$$

$$+o\left(\left(\frac{\ln^{2q-1} m}{m^{2q}}\right)^{2\gamma}\right), \ m \to \infty.$$

При этом из системы (4.4) находим, что

$$c_q = 2q\gamma^{2q-1}[(q-1)!]^2.$$

Отметив к тому же, что $m = n/q$, из последнего асимптотического равенства найдем

$$\hat{\varepsilon}^*_{2n,q}(f_\gamma, A^*_q) = \nu_1(\gamma,q)\left(\frac{\ln^{2q-1} n}{n^{2q}}\right)^{2\gamma} + o\left(\left(\frac{\ln^{2q-1} n}{n^{2q}}\right)^{2\gamma}\right),$$

$$n \to \infty,$$

где

$$\nu_1(\gamma,q) = \frac{2^{1+\gamma}\Gamma(2\gamma)(2^{1-2\gamma}-1)(q^{2q+1}\gamma^{2q-1})^{2\gamma}[(q-1)!]^{4\gamma}}{1-2\gamma},$$

$$\gamma \in (0,1/2).$$

Рассуждая аналогичным образом, получим при $\gamma = 1/2$

$$\hat{\varepsilon}^*_{2n,q}(f_\gamma, A^*_q) = \sqrt{2}q^{2q+1}\ln 2\frac{[(q-1)!]^2}{2^{2q-2}}\frac{\ln^{2q-1} n}{n^{2q}} +$$

$$+o\left(\frac{\ln^{2q-1} n}{n^{2q}}\right), \ n \to \infty,$$

и при $\gamma \in (1/2,1)$

$$\hat{\varepsilon}^*_{2n,q}(f_\gamma, A^*_q) =$$

$$= \nu_2(\gamma,q)\left(\frac{\ln^{2q-1} n}{n^{2q}}\right)^{2\gamma} + o\left(\left(\frac{\ln^{2q-1} n}{n^{2q}}\right)^{2\gamma}\right), n \to \infty,$$

где

$$\nu_2(\gamma,q) =$$

$$= \frac{2^{2-\gamma}\Gamma(2\gamma)(2^{2\gamma-1}-1)(q^{2q+1}\gamma^{2q-1})^{2\gamma}[(q-1)!]^{4\gamma}}{2\gamma-1}.$$

Осталось показать, что при найденных c_k, $k = 1,2,\ldots,q$, набор параметров β_k, $k = 1,2,\ldots,q$, будет оптимальным, то есть величина $\varepsilon^*_{2n}(A_q)$ имеет при них асимптотически минимальное значение. Для доказательства этого утверждения достаточно воспользоваться рассуждениями, предложенными, например, в [41], [42]. Приводить их в настоящей работе не будем ввиду того, что они являются достаточно громоздкими. Последнее позволяет заключить, что набор

$$\alpha^*_k = \frac{1-\beta^*_k}{1+\beta^*_k}, \ \beta^*_k = c^*_k\left(\frac{\ln m}{m}\right)^{2k-1}, \ k = 1,\ldots,q,$$

где c^*_k определяются условием (4.4), является оптимальным и выполняется соотношение (4.1). □

Интересно сравнить наилучшую мажоранту равномерных приближений, полученную для каждого $\gamma \in (0,1)$ в теореме 4.1, с наилучшей мажорантой $\varepsilon^*_{2n,q}(f_\gamma)$ равномерных рациональных приближений функции $f_\gamma(x)$, $\gamma \in (0,1)$, на отрезке [–1, 1] суммами Валле Пуссена рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва (0.2) с q геометрически различными полюсами. Этот результат содержится в [33]. Из указанной работы и полученных в теореме 4.1 результатов, заключаем, что

$$\varepsilon^*_{2n,q}(f_\gamma) \sim \hat{\varepsilon}^*_{2n,q}(f_\gamma), \ \gamma \in (0,1), \ n \to \infty.$$

Заключение

В работе исследованы рациональные аппроксимации сопряженной функции на отрезке [–1, 1] суммами Валле Пуссена сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва с произвольным фиксированным количеством геометрически различных полюсов. Установлено интегральное представление приближений сопряженной функции.

Изучены рациональные аппроксимации на отрезке [–1, 1] сопряженной функции с плотностью $(1-x)^\gamma$, $\gamma \in (0,1)$, введенными суммами Валле Пуссена. Получены интегральное представление приближений, оценка поточечных приближений и равномерных приближений с определенной мажорантой. Установлено ее асимптотическое выражение при $n \to \infty$, зависящее от параметров аппроксимирующей функции. В заключительной части найдены оптимальные значения параметров, при которых обеспечивается наибольшая скорость убывания мажоранты.

Следствием полученных результатов являются оценки поточечных и равномерных приближений и асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений сопряженной функции на отрезке суммами Валле Пуссена сопряженных полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что при специальном выборе параметров аппроксимирующей функции возможно добиться скорости равномерных приближений большей в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гахов, Ф.Д.* Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1958. – 543 с.

2. *Мусхелишвили, Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. 3-е изд. / Н.И. Мусхелишвили. – Москва: Наука, 1968. – 513 с.

3. *Бари, Н.К.* Тригонометрические ряды / Н.К. Бари. – Москва: Физматлит, 1961. – 936 с.

4. *Зигмунд, А.* Тригонометрические ряды. В 2-х томах. Том 1. / А. Зигмунд. – Москва: Мир, 1965. – 616 с.

5. *Русак, В.Н.* Равномерная рациональная аппроксимация сопряжённых функций / В.Н. Русак, И.В. Рыбаченко // Вестник БГУ. Сер. 1. Математика и информатика. – 2013. – Т. 3. – С. 83–86.

6. *Ровба*, *Е.А.* Приближения сопряженных функций частичными суммами сопряженных рядов Фурье по одной системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова / Е.А. Ровба, П.Г. Поцейко // Известия вузов. Математика. – 2020. – № 9. – С. 68–84.

7. *Ровба*, *Е.А.* Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации / Е.А. Ровба // Доклады АН БССР. – 1979. – Т. 23, № 11. – С. 968–971.

8. *Смотрицкий*, *К.А.* О приближении дифференцируемых в смысле Римана – Лиувилля функций / К.А. Смотрицкий // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2002. – Т. 4. – С. 42–47.

9. *Patseika*, *P.G.* On one rational integral operator of Fourier – Chebyshev type and approximation of Markov functions / P.G. Patseika, Y.A. Rouba, K.A. Smatrytski // Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. – 2020. – Vol. 2. – P. 6–27.

10. *Поцейко*, *П.Г.* Приближения на классах интегралов Пуассона рациональными интегральными операторами Фурье – Чебышёва / П.Г. Поцейко, Е.А. Ровба // Сибирский математический журнал. – 2021. – Т. 62, № 2. – С. 362–386.

11. *Поцейко*, *П.Г.* Сопряженный рациональный оператор Фурье – Чебышева и его аппроксимационные свойства / П.Г. Поцейко, Е.А. Ровба // Известия вузов. Математика. – 2022. – № 3. – С. 44–60.

12. *La Vallée Poussin*, *Ch.-J.* Sur la meilleure approximation des function d'une variable reelle par des expressions d'ordre donne / Ch.-J. de La Vallée Poussin // Comptes Rendus Acad. sci. Paris. – 1918. – Vol. 166. – P. 799–802.

13. *La Vallée Poussin*, *Ch.-J.* Lecons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle / Ch.-J. de La Vallée Poussin. Paris: GAUTHIER VILLARS ET CIE, 1919. – 150 p.

14. *Никольский*, *С.М.* О некоторых методах приближения тригонометрическими суммами / С.М. Никольский // Известия Академии наук СССР. Сер. матем. – 1940. – Т. 4, № 6. – С. 509–520.

15. *Стечкин*, *С.Б.* О суммах Валле Пуссена / С.Б. Стечкин // Доклады АН СССР. – 1951. – Т. 80, № 4. – С. 545–548.

16. *Теляковский*, *С.А.* Приближение дифференцируемых функций суммами Валле Пуссена / С.А. Теляковский // Доклады АН СССР. – 1958. – Т. 121, № 3. – С. 426–429.

17. *Ефимов*, *А.В.* О приближении периодических функций суммами Валле Пуссена / А.В. Ефимов // Известия Академии наук СССР. Сер. матем. – 1959. – Т. 23, № 5. – С. 737–770.

18. *Рукасов*, *В.И.* Приближение суммами Валле Пуссена классов аналитических функций / В.И. Рукасов // Украинский математический журнал. – 2003. – Т. 55, № 6. – С. 806–816.

19. *Сердюк*, *А.С.* Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена в рівномірній та інтегральних метриках / А.С. Сердюк // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. – 2009. – Vol. 6. – P. 34–39.

20. *Абрамов*, *Л.М.* Об асимптотическом поведении функций Лебега некоторых методов суммирования рядов Чебышёва / Л.М. Абрамов // Доклады АН СССР. – 1954. – Т. XCVIII, № 2. – С. 173–176.

21. *Ганзбург*, *И.М.* Обобщение некоторых результатов С.М. Никольского и А.Ф. Тимана / И.М. Ганзбург // Доклады АН СССР. – 1957. – Т. 116, № 5. – С. 727–730.

22. *Ганзбург*, *И.М.* Линейные процессы приближения функций, удовлетворяющих условию Липшица, алгебраическими многочленами / И.М. Ганзбург, А.Ф. Тиман // Известия Академии наук СССР. Сер. матем. – 1958. – Т. 22, № 6. – С. 771–810.

23. *Оматаев*, *Т.О.* О приближении непрерывных на отрезке функций усечёнными суммами Валле Пуссена / Т.О. Оматаев // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1977. – № 6. – С. 99–106.

24. *Щербина*, *А.Д.* Об одном методе суммирования рядов, сопряженных рядам Фурье / А.Д. Щербина // Математический сборник. – 1950. – Т. 27 (69), № 2. – С. 157–170.

25. *Тиман*, *А.Ф.* Аппроксимативные свойства линейных методов суммирования рядов Фурье / А.Ф. Тиман // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1953. – Т. 17, № 2. – С. 99–134.

26. *Теляковский*, С.А. О приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье / С.А. Теляковский // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1960. – Т. 24, № 2. – С. 213–242.

27. *Дудас*, *В.А.* Приближение сопряженных периодических функций суммами Валле Пуссена / В.А. Дудас // Украинский математический журнал. – 1978. – Т. 30, № 4. – С. 522–528.

28. *Байбородов*, С.П. Приближение функций суммами Валле Пуссена / С.П. Байбородов // Математические заметки. – 1980. – Т. 27, № 1. – С. 33–48.

29. *Русак*, *В.Н.* Об одном методе приближения рациональными функциями на вещественной оси / В.Н. Русак // Математические заметки. – 1977. – Т. 22, № 3. – С. 375–380.

30. *Ровба*, *Е.А.* Приближение функций, дифференцируемых в смысле Римана – Лиувилля, рациональными операторами / Е.А. Ровба // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 1996. – Т. 40, № 6. – С. 18–22.

31. *Смотрицкий*, *К.А.* О приближении функций ограниченной вариации рациональными операторами на отрезке / К.А. Смотрицкий // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка.

Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2005. – Т. 2, № 2. – С. 60–68.

32. *Поцейко*, *П.Г.* Суммы Валле Пуссена рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва и аппроксимации интегралов Пуассона на отрезке / П.Г. Поцейко, Е.А. Ровба // Сибирский математический журнал. – 2023. – Т. 64, № 1. – С. 162–183.

33. *Поцейко*, *П.Г.* Суммы Валле Пуссена рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышева и аппроксимации функции Маркова / П.Г. Поцейко, Е.А. Ровба // Алгебра и анализ. – 2023. – Т. 35, № 5. – С. 183–208.

34. *Поцейко*, *П.Г.* О рациональных сопряженных суммах Фейера на отрезке и аппроксимациях сопряженной функции / П.Г. Поцейко // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 56–67.

35. *Лунгу*, *К.Н.* О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов / К.Н. Лунгу // Математический сборник. – 1971. – Т. 86 (128), № 2 (10). – С. 314–324.

36. *Лунгу*, *К.Н.* О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов / К.Н. Лунгу // Сибирский математический журнал. – 1984. – Т. 15, № 2. – С. 151–160.

37. *Русак*, *В.Н.* Рациональные функции как аппарат приближения / В.Н. Русак. – Минск: БГУ, 1979. – 153 с.

38. *Сидоров*, *Ю.В.* Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1989. – 480 с.

39. *Евграфов*, *М.А.* Асимптотические оценки и целые функции / М.А. Евграфов. – Москва: Наука, 1979. – 320 с.

40. *Федорюк*, *М.В.* Асимптотика. Интегралы и ряды / М.В. Федорюк. – Москва: Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1987. – 544 с.

41. *Ровба*, *Е.А.* Константы в приближении $|x|$ рациональными интерполяционными процессами / Е.А. Ровба, Е.Г. Микулич // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 6. – С. 11–15.

42. *Микулич*, *Е.Г.* Точные оценки равномерных приближений функции $|\sin x|$ частными суммами рядов Фурье по рациональным функциям / Е.Г. Микулич // Вестник БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2011. – Т. 1. – С. 84–90.

Поступила в редакцию 01.02.2024.

Информация об авторах

Поцейко Павел Геннадьевич – к.ф.-м.н., доцент