УДК 517.538.52+517.538.53

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_71
EDN: JIITRH

О СУЩЕСТВОВАНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ

А.П. Старовойтов, Т.М. Оснач, Н.В. Рябченко

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ON THE EXISTENCE OF TRIGONOMETRIC PADÉ APPROXIMATIONS

A.P. Starovoitov, T.M. Osnach, N.V. Ryabchenko

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. В работе, опираясь на хорошо известные результаты о классических аппроксимациях Паде степенного ряда, найдены условия, при которых для заданного ряда Фурье существуют тригонометрические аппроксимации Паде – Якоби. Это позволило описать класс рядов Фурье по многочленам Чебышёва первого и второго рода, для которых существуют нелинейные аппроксимации Паде – Чебышёва. В частности, дано ещё одно доказательство известной теоремы С.П. Суетина.

Ключевые слова: *аппроксимации Паде*, *аппроксимации Паде – Чебышёва*, *степенные ряды*, *ряды Фурье*, *ряды по многочленам Чебышёва*.

Для цитирования: *Старовойтов*, *А.П.* О существовании тригонометрических аппроксимаций Паде / А.П. Старовойтов, Т.М. Оснач, Н.В. Рябченко // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 71–76. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_71. – EDN: JIITRH

Abstract. In this work, based on the well-known results on classical Padé approximants of power series, the conditions are found under which trigonometric Padé – Jacobi approximants exist for a given Fourier series. This made it possible to describe the class of Fourier series in Chebyshev polynomials of the first and second kind, for which there are nonlinear Padé – Chebyshev approximants. In particular, another proof of the well-known theorem of S.P. Suetin is given.

Keywords: *Padé approximants*, *Padé – Chebyshev approximations*, *power series*, *Fourier series*, *series in Chebyshev polynomials*.

For citation: Starovoitov, A.P. On the existence of trigonometric Padé approximations / A.P. Starovoitov, T.M. Osnach, N.V. Ryabchenko // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 3 (60). – P. 71–76. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_71 (in Russian). – EDN: JIITRH

Введение

Рассмотрим тригонометрический ряд

$$f^t(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{l=1}^{\infty}\left(a_l\cos lx+b_l\sin lx\right) \qquad (0.1)$$

с действительными коэффициентами, сходящийся при всех $x\in\mathbb{R}$ и определяющий функцию f^t, заданную на всей действительной прямой. Для ряда (0.1) определим два вида тригонометрических аппроксимаций Паде.

Тригонометрической аппроксимацией Паде – Фробениуса типа (n,m) ряда (функции) f^t назовём рациональную дробь

$$\pi^t_{n,m}(x;f^t)=\frac{P^t_{n,m}(x)}{Q^t_{n,m}(x)},$$

где тождественно не равный нулю тригонометрический многочлен $Q^t_{n,m}$, $\deg Q^t_{n,m}\leqslant m$ и тригонометрический многочлен $P^t_{n,m}$, $\deg P^t_{n,m}\leqslant n$ удовлетворяют условию

$$\left(Q^t_{n,m}f^t-P^t_{n,m}\right)(x)=\sum_{l=n+m+1}^{\infty}\left(\tilde a_l\cos lx+\tilde b_l\sin lx\right). \qquad (0.2)$$

Здесь и далее n, m – целые неотрицательные числа.

Тригонометрической аппроксимацией Паде – Якоби типа (n,m) ряда f^t назовём рациональную функцию

$$\hat\pi^t_{n,m}(x)=\hat\pi^t_{n,m}(x;f^t)=\frac{\hat P^t_{n,m}(x)}{\hat Q^t_{n,m}(x)},$$

при всех $x\in\mathbb{R}$ представимую тригонометрическим рядом, у которой тригонометрические многочлены в числителе и знаменателе имеют степени $\deg\hat Q^t_{n,m}\leqslant m$, $\deg\hat P^t_{n,m}\leqslant n$ и для которой

$$f^t(x)-\hat\pi^t_{n,m}(x)=\sum_{l=n+m+1}^{\infty}(\tilde a_l\cos lx+\tilde b_l\sin lx).$$

Тригонометрические аппроксимации Паде – Фробениуса и Паде – Якоби являются естественным обобщением соответствующих классических аппроксимаций Паде степенного ряда [1]. Хорошо известно, что ряд важных свойств классических аппроксимаций Паде при таком обобщении не сохраняется. Например, тригонометрические аппроксимации Паде – Фробениуса $\pi^t_{n,m}$ всегда существуют, но определяются, вообще говоря, не однозначно, а тригонометрические аппроксимации Паде – Якоби $\hat{\pi}^t_{n,m}$ не всегда существуют, но в важных для приложений случаях определяются однозначно [2]–[5]. В данной работе будем рассматривать только тригонометрические аппроксимации Паде – Якоби (свойства тригонометрических аппроксимаций Паде – Фробениуса подробно изучались в [3]). Нас интересуют условия, при которых они существуют. В основной теореме работы найден широкий класс тригонометрических рядов, для которых тригонометрические аппроксимации Паде – Якоби $\hat{\pi}^t_{n,m}$ существуют. В частности, показано, что существование тригонометрических аппроксимации Паде – Якоби можно описать с помощью хорошо известных результатов о классических аппроксимациях Паде степенного ряда. В качестве приложения получено новое конструктивное доказательство известной теоремы С.П. Суетина [5] о существовании и единственности нелинейных аппроксимаций Паде – Чебышёва аналитических функций, представимых в виде ряда Фурье по многочленам Чебышёва первого рода. Аналогичный результат получен и для нелинейных аппроксимаций Паде – Чебышёва аналитических функций, представимых в виде ряда Фурье по многочленам Чебышёва второго рода.

1 Аппроксимации Паде степенного ряда

Приведём некоторые хорошо известные факты теории аппроксимаций Паде степенных рядов, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Тригонометрическому ряду (0.1) поставим в соответствие степенной ряд

$$f(z)=\sum_{l=0}^{\infty} f_l z^l, \tag{1.1}$$

в котором $f_0=a_0/2,\quad f_l=a_l-ib_l,\quad l=1,2,\ldots.$ Нетрудно заметить, что при таком выборе коэффициентов f_l ряд (0.1) является действительной частью ряда (1.1) при $z=e^{ix}$.

Для каждой пары (n,m) существуют алгебраические многочлены $Q_{n,m}$, $\deg Q_{n,m}\leqslant m$, $P_{n,m}$, $\deg P_{n,m}\leqslant n$, для которых

$$(Q_m f-P_n)(z)=O(z^{n+m+1}). \tag{1.2}$$

Здесь под $O(z^p)$ понимаем степенной ряд вида $c_1 z^p+c_2 z^{p+1}+\ldots$ Рациональную функцию

$$\pi_{n,m}(z)=\pi_{n,m}(z;f)=\frac{P_{n,m}(z)}{Q_{n,m}(z)}$$

принято называть *аппроксимацией Паде – Фробениуса* типа (n,m) ряда f (авторство А. Паде основывается на его диссертации [6] 1892 г.; в качестве определения рациональной дроби $\pi_{n,m}(\cdot;f)$ соотношения (1.2) впервые были предложены в 1881 г. Г. Фробениусом [7]). Многочлены $Q_{n,m}$ и $P_{n,m}$ условием (1.2) определяются не единственным образом, тем не менее, дроби $\pi_{n,m}(\cdot;f)$ определяют одну и ту же рациональную функцию [8].

Несколько иная интерполяционная конструкция была предложена К. Якоби [9]. Она приводит к следующему определению.

Аппроксимацией Паде – Якоби типа (n,m) ряда f будем называть рациональную дробь

$$\hat{\pi}_{n,m}(z)=\hat{\pi}_{n,m}(z;f)=\frac{\hat{P}_{n,m}(z)}{\hat{Q}_{n,m}(z)},$$

у которой алгебраические многочлены $\hat{Q}_{n,m},\hat{P}_{n,m}$ имеют степени соответственно не выше m и n и для которой $f(z)-\hat{\pi}_{n,m}(z)=O(z^{n+m+1})$. В отличие от $\pi_{n,m}$ аппроксимация Паде – Якоби $\hat{\pi}_{n,m}$ может не существовать [1], но если существует, то совпадает с $\pi_{n,m}$. Первый существенный результат в исследовании условий, при которых $\hat{\pi}_{n,m}$ существует, был получен К. Якоби [9]. Для его формулировки введем в рассмотрение определители Адамара

$$H_{n,m}=\begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+1} & \cdots & f_n \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \cdots & f_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n & f_{n+1} & \cdots & f_{n+m-1} \end{vmatrix},$$

элементами которых являются коэффициенты ряда (1.1). Здесь при $p<0$ считаем, что $f_p=0.$ К. Якоби [9] доказал, что если определитель $H_{n,m}\neq 0,$ то аппроксимации Паде – Якоби $\hat{\pi}_{n,m}(\cdot;f)$ существуют и совпадают с аппроксимациями Паде – Фробениуса $\pi_{n,m}(\cdot;f)$. Полное исследование условий при которых $\hat{\pi}_{n,m}(\cdot;f)$ существуют, провёл Д. Бейкер [1, гл. 1, § 1.4]. В этой связи рациональные функции $\hat{\pi}_{n,m}(\cdot;f)$ называют также аппроксимациями Паде в смысле Бейкера. Если матрица

$$F_{n,m}=\begin{bmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+1} & \cdots & f_n & f_{n+1} \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \cdots & f_{n+1} & f_{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n & f_{n+1} & \cdots & f_{n+m-1} & f_{n+m} \end{bmatrix}$$

является матрицей полного ранга (т. е. $rankF_{n,m}=m$), то многочлены Паде $Q_{n,m}$, $P_{n,m}$ условиями (1.2) определяются однозначно (с точностью до числового множителя) (см. [1], [10]) и при некотором выборе нормирующего множителя представляются в виде

$$Q_{n,m}(z;f)=\begin{vmatrix} f_{n-m+1} & \cdots & f_n & f_{n+1} \\ f_{n-m+2} & \cdots & f_{n+1} & f_{n+2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ f_n & \cdots & f_{n+m-1} & f_{n+m} \\ z^m & \cdots & z & 1 \end{vmatrix}, \tag{1.3}$$

$$P_{n,m}(z;f)=\begin{vmatrix} f_{n-m+1} & \dots & f_n & f_{n+1} \\ f_{n-m+2} & \dots & f_{n+1} & f_{n+2} \\ \dots & \dots & & \dots \\ f_n & \dots & f_{n+m-1} & f_{n+m} \\ z^m\Phi_{n-m}(z) & \dots & z\Phi_{n-1}(z) & \Phi_n(z) \end{vmatrix}, \quad (1.4)$$

где $\Phi_k(z)=\sum_{l=0}^{k} f_l z^l$; $\Phi_k(z)\equiv 0$ и $f_k=0$ при $k<0$.

Замечание 1. Если определитель Адамара $H_{n,m}\neq 0$, то матрица $F_{n,m}$ является матрицей полного ранга.

Замечание 2. В том случае, когда коэффициенты ряда (1.1) являются действительными числами, многочлены Паде $Q_{n,m}(\cdot;f)$, $P_{n,m}(\cdot;f)$ являются алгебраическими многочленами с действительными коэффициентами.

2 Существование тригонометрических аппроксимаций Паде – Якоби

Основным результатом статьи является следующая

***Теорема* 2.1.** *При* $n\geqslant m$ *для существования тригонометрической аппроксимации Паде – Якоби* $\hat{\pi}^t_{n,m}(\cdot;f^t)$ *функции* f^t, *представленной рядом* (0.1), *достаточно*, *чтобы для соответствующей аналитической функции f*, *представленной рядом* (1.1), *выполнялись следующие три условия*:

1) *для пары* (n,m) *существует аппроксимация Паде – Якоби* $\hat{\pi}_{n,m}(\cdot;f)$;

2) *ряд* (1.1) *имеет радиус сходимости* $R>1$;

3) *рациональная функция* $\hat{\pi}_{n,m}(\cdot;f)$ *в круге* $\overline{D}=\{z:|z|\leqslant 1\}$ *не имеет полюсов.*

Доказательство. Из условия 1) следует, что в некоторой окрестности нуля

$$f(z)-\hat{\pi}_{n,m}(z;f)=\sum_{l=n+m+1}^{+\infty}\tilde{f}_l z^l \quad (2.1)$$

Выполнение условий 2) и 3) позволяет в качестве такой окрестности взять открытый круг с центром в нуле, радиус которого больше 1. Тогда положив в (2.1) $z=e^{ix}$, а затем приравнивая действительные части от выражений, стоящих слева и справа от знака нового равенства, получим

$$f^t(x)-\mathrm{Re}\left\{\hat{\pi}_{n,m}(e^{ix};f)\right\}= \\ =\sum_{l=n+m+1}^{\infty}\left(d_l\cos lx+h_l\sin lx\right). \quad (2.2)$$

Остаётся показать, что при $n\geqslant m$

$$\hat{\pi}^t_{n,m}(x;f^t)=\mathrm{Re}\left\{\hat{\pi}_{n,m}(e^{ix};f)\right\}. \quad (2.3)$$

Пусть числитель $\hat{P}_{n,m}(\cdot;f)$ и знаменатель $\hat{Q}_{n,m}(\cdot;f)$ дроби $\hat{\pi}_{n,m}(\cdot;f)$ представимы в виде

$$\hat{Q}_{n,m}(z;f)=\sum_{l=0}^{m}q_l z^l, \hat{P}_{n,m}(z;f)=\sum_{l=0}^{m}p_l z^l.$$

Тогда при $z=e^{ix}$ (см. [1, часть 2, гл. 1, § 1.6])

$$\mathrm{Re}\left\{\hat{\pi}_{n,m}(e^{ix};f)\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{P}_{n,m}(z;f)}{\hat{Q}_{n,m}(z;f)}+\overline{\frac{\hat{P}_{n,m}(z;f)}{\hat{Q}_{n,m}(z;f)}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sum_{l=0}^{n}p_l e^{ilx}\cdot\sum_{s=0}^{m}\overline{q}_s e^{-isx}+\sum_{l=0}^{n}\overline{p}_l e^{-ilx}\cdot\sum_{s=0}^{m}q_s e^{isx}}{\sum_{s=0}^{m}q_s e^{isx}\cdot\sum_{l=0}^{m}\overline{q}_l e^{-ilx}}= \quad (2.4)$$

$$=\frac{\sum_{s=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}\left\{\mathrm{Re}(p_s\overline{q}_l)\cos(s-l)x-\mathrm{Im}(p_s\overline{q}_l)\sin(s-l)x\right\}}{\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}\left\{\mathrm{Re}(q_s\overline{q}_l)\cos(s-l)x-\mathrm{Im}(q_s\overline{q}_l)\sin(s-l)x\right\}}=:$$

$$=:\frac{\hat{P}^t_{n,m}(x)}{\hat{Q}^t_{n,m}(x)}.$$

Отсюда следует, что в (2.4) многочлен $\hat{Q}^t_{n,m}$ имеет степень не выше *m*, а при $n\geqslant m$ степень многочлена $\hat{P}^t_{n,m}$ не превышает *n*. Тогда из (2.2) и (2.4) вытекает, что эти многочлены являются знаменателем и числителем дроби $\hat{\pi}^t_{n,m}(\cdot;f^t)$. Справедливость равенства (2.3) установлена и теорема 2.1 доказана. □

Предположим теперь, что ряд (0.1) имеет вид

$$f^t(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{l=1}^{\infty}a_l\cos lx. \quad (2.5)$$

Ряду (2.5) соответствует степенной ряд (1.1)

$$f(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{l=1}^{\infty}a_l z^l \quad (2.6)$$

с действительными коэффициентами. Если для функции (2.6) выполнены условия теоремы 1, то аппроксимации Паде – Якоби $\hat{\pi}_{n,m}(\cdot;f)$ существуют и совпадают с аппроксимациями Паде – Фробениуса $\pi_{n,m}(\cdot;f)$. Поскольку в рассматриваемом случае числитель и знаменатель дроби $\hat{\pi}_{n,m}(\cdot;f)$ являются алгебраическими многочленами с действительными коэффициентами, то из (2.4) получаем

$$\hat{\pi}^t_{n,m}(x;f^t)=\mathrm{Re}\left\{\hat{\pi}_{n,m}(e^{ix};f)\right\}= \\ =\frac{\sum_{s=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}p_s q_l\cos(s-l)x}{\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}q_s q_l\cos(s-l)x}. \quad (2.7)$$

Следовательно справедливо

***Следствие* 2.1.** *Пусть* $n\geqslant m$, *а функция* f^t *представлена тригонометрическим рядом* (2.5). *Тогда при выполнении для f условий теоремы* 2.1 *существует тригонометрическая аппроксимация Паде – Якоби* $\hat{\pi}^t_{n,m}(\cdot;f^t)$, *числитель* $\hat{P}^t_{n,m}$ *и знаменатель* $\hat{Q}^t_{n,m}$ *которой являются чётными тригонометрическими многочленами с* *действительными коэффициентами, и справедливы равенства*

$$\hat{Q}^t_{n,m}(x;f^t) = Q_{n,m}(e^{ix};f)\cdot\overline{Q_{n,m}(e^{ix};f)}, \quad (2.8)$$

$$\hat{P}^t_{n,m}(x;f^t) = \mathrm{Re}\left\{P_{n,m}(e^{ix};f)\cdot\overline{Q_{n,m}(e^{ix};f)}\right\}, \quad (2.9)$$

$$f^t(x) - \hat{\pi}^t_{n,m}(x;f^t) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} d_l \cos lx. \quad (2.10)$$

Если соответствующая степенному ряду (2.6) *матрица* $F_{n,m}$ *является матрицей полного ранга, то при соответствующей нормировке многочлены* $Q_{n,m}(\cdot;f)$, $P_{n,m}(\cdot;f)$ *в* (2.8), (2.9) *вычисляются по формулам* (1.3), (1.4), *в которых* $f_l = a_l$ *для всех l.*

Предположим теперь, что ряд (0.1) имеет вид

$$f^t(x) = \sum_{l=1}^{\infty} b_l \sin lx. \quad (2.11)$$

В отличие от общего случая, поставим ряду (2.11) в соответствие ряд

$$f(z) = \sum_{l=1}^{\infty} b_l z^l. \quad (2.12)$$

Так как коэффициенты b_l – действительные числа, то $f^t(x) = \mathrm{Im} f(e^{ix})$. Считаем, что для f выполнены условия теоремы 1. Тогда существует аппроксимация Паде – Якоби $\hat{\pi}_{n,m}(\cdot;f)$. Пусть $\hat{P}_{n,m}(\cdot;f)$, $\hat{Q}_{n,m}(\cdot;f)$ – соответственно числитель и знаменатель дроби $\hat{\pi}_{n,m}(\cdot;f)$. Рассуждая аналогично, как и при доказательстве теоремы 2.1, при $n \geqslant m$ и $z = e^{ix}$ получим

$$\hat{\pi}^t_{n,m}(x;f^t) = \mathrm{Im}\left\{\hat{\pi}_{n,m}(e^{ix};f)\right\} = \frac{1}{2i}\left(\frac{\hat{P}_{n,m}(z;f)}{\hat{Q}_{n,m}(z;f)} - \frac{\overline{\hat{P}_{n,m}(z;f)}}{\overline{\hat{Q}_{n,m}(z;f)}}\right) = \frac{\sum_{s=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} p_s q_l \sin(s-l)x}{\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} q_s q_l \cos(s-l)x}. \quad (2.13)$$

Следствие 2.2. *Пусть* $n \geqslant m$, *а функция* f^t *представлена тригонометрическим рядом* (2.11). *Тогда при выполнении для ряда* (2.12) *условий теоремы* 2.1 *существуют тригонометрические аппроксимации Паде – Якоби* $\hat{\pi}^t_{n,m}(\cdot;f^t)$, *числитель* $\hat{P}^t_{n,m}$ *и знаменатель* $\hat{Q}^t_{n,m}$ *которых являются тригонометрическими многочленами с действительными коэффициентами, числитель* $\hat{P}^t_{n,m}$ *является нечетным тригонометрическим многочленом и справедливы равенства*

$$\hat{Q}^t_{n,m}(x;f^t) = Q_{n,m}(e^{ix};f)\cdot\overline{Q_{n,m}(e^{ix};f)}, \quad (2.14)$$

$$\hat{P}_{n,m}(x;f^t) = \mathrm{Im}\left\{P_{n,m}(e^{ix};f)\cdot\overline{Q_{n,m}(e^{ix};f)}\right\}, \quad (2.15)$$

$$f^t(x) - \hat{\pi}^t_{n,m}(x;f^t) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} h_l \sin lx. \quad (2.16)$$

Если соответствующая степенному ряду (2.12) *матрица* $F_{n,m}$ *является матрицей полного ранга, то при соответствующей нормировке многочлены* $Q_{n,m}(\cdot;f)$, $P_{n,m}(\cdot;f)$ *в* (2.14), (2.15) *вычисляются по формулам* (1.3), (1.4), *в которых* $f_l = a_l$ *для всех l.*

3 Аппроксимации Паде – Чебышёва

В этом разделе приведём примеры приложений теоремы 2.1 и её следствий.

3.1. Рассмотрим ряд Фурье по многочленам Чебышёва $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ первого рода

$$f^{ch1}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} a_l T_l(x) \quad (3.1)$$

с действительными коэффициентами. Считаем, что ряд (3.1) сходится на [–1, 1] и определяет на этом отрезке функцию f^{ch1}. Известно (см., например, [5]), что для любой пары индексов (n,m) и ряда f^{ch1} существует тождественно не равный нулю алгебраический многочлен $Q^{ch1}_{n,m}$, $\deg Q^{ch1}_{n,m} \leqslant m$ и алгебраический многочлен $P^{ch1}_{n,m}$, $\deg P^{ch1}_{n,m} \leqslant n$ такие, что

$$\left(Q^{ch1}_{n,m} f^{ch} - P^{ch1}_{n,m}\right)(x) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \tilde{a}_l T_l(x). \quad (3.2)$$

Линейной аппроксимацией Паде – Чебышёва первого рода для пары (n,m) и ряда f^{ch1} называют рациональную дробь

$$\pi^{ch1}_{n,m}(x) = \pi^{ch1}_{n,m}(x;f^{ch1}) = \frac{P^{ch1}_{n,m}(x)}{Q^{ch1}_{n,m}(x)},$$

где многочлены $Q^{ch1}_{n,m}$, $P^{ch1}_{n,m}$ определяются равенством (3.2). Линейные аппроксимации Паде–Чебышёва $\pi^{ch1}_{n,m}(x;f^{ch1})$ всегда существуют, но определяются, вообще говоря, не однозначно [5].

Нелинейной аппроксимацией Паде – Чебышёва первого рода для пары (n,m) и ряда f^{ch1} называют рациональную дробь вида

$$\hat{\pi}^{ch1}_{n,m}(x) = \hat{\pi}^{ch1}_{n,m}(x;f^{ch1}) = \frac{\hat{P}^{ch1}_{n,m}(x)}{\hat{Q}^{ch1}_{n,m}(x)},$$

где алгебраические многочлены $\hat{Q}^{ch1}_{n,m}$, $\hat{P}^{ch1}_{n,m}$, степени которых соответственно не превышают m и n, подобраны так, чтобы

$$f^{ch1}(x) - \hat{\pi}^{ch1}_{n,m}(x;f^{ch1}) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \hat{a}_l T_l(x).$$

В отличие от линейных, нелинейные аппроксимации Паде – Чебышёва $\hat{\pi}^{ch1}_{n,m}(\cdot;f^{ch1})$ не всегда существуют, но если существуют, то определяются однозначно [5]. С точки зрения эффективности приближения функций, представленных рядами по многочленам Чебышёва первого рода, нелинейные аппроксимации $\hat{\pi}^{ch1}_{n,m}(\cdot; f^{ch1})$ имеют значительные преимущества в сравнении с линейными. По этой причине, несмотря на проблему их существования, например, в системе MAPLE реализована программа вычисления именно нелинейных аппроксимаций Паде – Чебышёва (подробнее см. [5], [11]).

Следующая теорема доказана С.П. Суетиным [5], исходя из довольно общих результатов, касающихся свойств оператора Фабера. Здесь будет дано другое доказательство теоремы Суетина, которое опирается только на следствие 2.1 из теоремы 2.1 и является конструктивным (получен явный вид аппроксимаций Паде – Чебышёва первого рода).

***Теорема* 3.1.** Рассмотрим ряд (3.1), представляющий функцию f^{ch1}, в котором коэффициенты a_l совпадают с коэффициентами рядов (2.5) и (2.6). Тогда при $n \geqslant m$ для существования нелинейной аппроксимации Паде – Чебышёва первого рода $\hat{\pi}^{ch1}_{n,m}(\cdot; f^{ch1})$ необходимо и достаточно, чтобы для функции *f*, заданной равенством (2.6), выполнялись условия 1) – 3) теоремы 2.1.

При выполнении условий 1) – 3) *для числителя и знаменателя рациональной дроби* $\hat{\pi}^{ch1}_{n,m}(\cdot; f^{ch1})$ *справедливы формулы*

$$\hat{Q}^{ch1}_{n,m}(x; f^{ch1}) = Q_{n,m}(e^{i\arccos x}; f) \cdot \overline{Q_{n,m}(e^{i\arccos x}; f)}, \tag{3.3}$$

$$\hat{P}^{ch1}_{n,m}(x; f^{ch1}) = = \operatorname{Re}\left\{P_{n,m}(e^{i\arccos x}; f) \cdot \overline{Q_{n,m}(e^{i\arccos x}; f)}\right\}. \tag{3.4}$$

Если соответствующая степенному ряду (2.6) *матрица* $F_{n,m}$ *является матрицей полного ранга*, *то при соответствующей нормировке многочлены* $Q_{n,m}(\cdot; f)$, $P_{n,m}(\cdot; f)$ *в* (3.3), (3.4) *вычисляются по формулам* (1.3), (1.4), *в которых* $f_l = a_l$ *для всех l*.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что функция $f^t(x) = f^{ch1}(\cos x)$ представима тригонометрическим рядом

$$f^t(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} a_l \cos lx.$$

Учитывая следствие 2.1, равенства (2.4) и (2.7)–(2.10), числитель, знаменатель тригонометрической аппроксимации Паде – Якоби $\hat{\pi}^t_{n,m}(\cdot; f^t)$ и остаточный член предствимы в виде

$$\hat{Q}^t_{n,m}(x; f^t) = Q_{n,m}(e^{ix}; f) \cdot \overline{Q_{n,m}(e^{ix}; f)} = = \sum_{l=0}^{m} q_l \cos lx, \tag{3.5}$$

$$\hat{P}^t_{n,m}(x; f^t) = \operatorname{Re}\left\{P_{n,m}(e^{ix}; f) \cdot \overline{Q_{n,m}(e^{ix}; f)}\right\} = \tag{3.6}$$

$$= \sum_{l=0}^{n} p_l \cos lx,$$

$$f^t(x) - \hat{\pi}^t_{n,m}(x; f^t) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} d_l \cos lx. \tag{3.7}$$

Вместо *x* подставим в (3.7) $\arccos x$. В результате с учетом (3.5) и (3.6) получим

$$f^{ch1}(x) - \hat{\pi}^{ch1}_{n,m}(x; f^{ch1}) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} d_l T_l(x),$$

где

$$\hat{\pi}^{ch1}_{n,m}(x; f^{ch1}) = \frac{\hat{P}^t_{n,m}(\arccos x; f^t)}{\hat{Q}^t_{n,m}(\arccos; f^t)}.$$

Отсюда и из (3.5), (3.6) следуют равенства (3.3) и (3.4). Достаточность условий 1) – 3) доказана. Необходимость доказана в [5]. □

3.2. Рассмотрим ряд Фурье по многочленам Чебышёва $U_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos x)$ второго рода

$$f^{ch2}(x) = \sum_{l=1}^{\infty} b_l U_l(x) \tag{3.8}$$

с действительными коэффициентами. Считаем, что ряд (3.8) сходится при $x \in [-1,1]$ и определяет на $[-1,1]$ функцию f^{ch2}. Аналогично, как и в предыдущем случае, определяются линейные $\pi^{ch2}_{n,m}(\cdot; f^{ch2})$ и нелинейные $\hat{\pi}^{ch2}_{n,m}(\cdot; f^{ch2})$ аппроксимации Паде – Чебышёва второго рода. Например, *нелинейной аппроксимацией Паде – Чебышёва второго рода* для пары (n,m) и ряда (3.8) f^{ch2} назовём рациональную дробь

$$\hat{\pi}^{ch2}_{n,m}(x; f^{ch2}) = \frac{\hat{P}^{ch2}_{n,m}(x)}{\hat{Q}^{ch2}_{n,m}(x)},$$

у которой алгебраические многочлены $\hat{Q}^{ch2}_{n,m}$, $\hat{P}^{ch2}_{n,m}$ имеют соответственно степени не выше *m* и *n*, и

$$f^{ch2}(x) - \hat{\pi}^{ch2}_{n,m}(x; f^{ch2}) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \hat{a}_l U_n(x).$$

Ряду (3.8) f^{ch2} поставим в соответствие ряды (2.11) и (2.12) с такими же коэффициентами, определяющие соответственно функции f^t и *f*. Следующая теорема является аналогом теоремы 3.1 для нелинейных аппроксимаций Паде – Чебышёва второго рода.

***Теорема* 3.2.** *При* $n \geqslant m$ *для существования нелинейной аппроксимации Паде – Чебышёва второго рода* $\hat{\pi}^{ch2}_{n,m}(\cdot; f^{ch2})$ *достаточно*, *чтобы ряд* (2.12), *удовлетворял условиям* 1) – 3) *теоремы* 1.

При выполнении условий 1) – 3) *для ряда* (2.12) *числитель и знаменатель рациональной дроби* $\hat{\pi}^{ch2}_{n,m}(\cdot; f^{ch2})$ *определяются формулами*

$$\hat{Q}^{ch2}_{n,m}(x; f^{ch2}) = \\ = Q_{n,m}(e^{i\arccos x}; f)\cdot\overline{Q_{n,m}(e^{i\arccos x}; f)}, \quad (3.9)$$

$$\hat{P}^{ch2}_{n,m}(x; f^{ch2}) = \\ = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{Im}\left\{P_{n,m}(e^{i\arccos x}; f)\cdot\overline{Q_{n,m}(e^{i\arccos x}; f)}\right\}. \quad (3.10)$$

Если соответствующая степенному ряду (2.12) *матрица* $F_{n,m}$ *является матрицей полного ранга, то при соответствующей нормировке многочлены* $Q_{n,m}(\cdot; f)$, $P_{n,m}(\cdot; f)$ *в* (3.9), (3.10) *вычисляются по формулам* (1.3), (1.4), *в которых* $f_l = b_l$ *для всех l.*

Доказательство. Из (3.8) следует, что функция $f^t(x) = \sqrt{1-x^2} f^{ch2}(\cos x)$ представима тригонометрическим рядом

$$f^t(x) = \sum_{l=1}^{\infty} b_l \sin lx.$$

Учитывая следствие 2.2, равенства (2.4) и (2.13)–(2.15), числитель, знаменатель тригонометрической аппроксимации Паде – Якоби $\hat{\pi}^t_{n,m}(\cdot; f^t)$ и остаточный член предствимы в виде

$$\hat{Q}^t_{n,m}(x; f^t) = Q_{n,m}(e^{ix}; f)\cdot\overline{Q_{n,m}(e^{ix}; f)} = \\ = \sum_{l=0}^{\infty} q_l \cos lx, \quad (3.10)$$

$$\hat{P}^t_{n,m}(x; f^t) = \operatorname{Im}\left\{P_{n,m}(e^{ix}; f)\cdot\overline{Q_{n,m}(e^{ix}; f)}\right\} = \\ = \sum_{l=0}^{\infty} p_l \sin lx, \quad (3.11)$$

$$f^t(x) - \hat{\pi}^t_{n,m}(x; f^t) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} d_l \sin lx. \quad (3.12)$$

Вместо x подставим в (3.12) $\arccos x$, а затем разделим левую и правую часть полученного равенства на $\sqrt{1-x^2}$. В результате с учётом равенств (3.10), (3.11) получим

$$f^{ch2}(x) - \hat{\pi}^{ch2}_{n,m}(x; f^{ch2}) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} d_l U_l(x),$$

где

$$\hat{\pi}^{ch2}_{n,m}(x; f^{ch2}) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{\hat{P}^t_{n,m}(\arccos x; f^t)}{\hat{Q}^t_{n,m}(\arccos; f^t)}.$$

Отсюда и из (3.10), (3.11) следуют равенства (3.9) и (3.10). Достаточность условий 1)–3) доказана. Теорема 3.2 доказана. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бейкер мл., Дж.* Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс – Моррис. – Москва: Мир, 1986.

2. *Лабыч, Ю.А.* Тригонометрические аппроксимации Паде функций с регулярно убывающими коэффициентами Фурье / Ю.А. Лабыч, А.П. Старовойтов // Математический сборник. – 2009. – Т. 200, № 7. – С. 107–130.

3. *Старовойтов, А.П.* Существование и единственность совместных аппроксимаций Эрмита – Фурье / А.П. Старовойтов, Е.П. Кечко, Т.М. Оснач // Проблемы физики, математики и техники – 2023. – № 2 (55). – С. 68–73.

4. *Старовойтов, А.П.* О существовании тригонометрических аппроксимаций Эрмита – Якоби и нелинейных аппроксимаций Эрмита – Чебышёва / А.П. Старовойтов, Е.П. Кечко, Т.М. Оснач // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2023. – № 2. – С. 6–17.

5. *Суетин, С.П.* О существовании нелинейных аппроксимаций Паде – Чебышёва для аналитических функций / С.П. Суетин // Математические заметки. – 2009. – Т. 86, № 2. – С. 290–303.

6. *Padé, H.* Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles / H. Padé // Annales scientifiques de l'É.N.S. Ser. 3 – 1892. – Vol. 9. – P. 3–93.

7. *Frobenious, G.* Ueber Relationen zwischen den Naherung – sbruchen von Potenzreihen / G. Frobenious // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1881. – Vol. 90. – P. 1–17.

8. *Никишин, Е.М.* Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – Моска: Наука, 1988.

9. *Jacobi, C.* Über die Darstellung einer Reihe gegebner Werthe durch eine gebrochne rationale Function / C. Jacobi // J. Reine Angew. Math. – 1846. – Vol. 30. – P. 127–156.

10. *Старовойтов, А.П.* О детерминантных представлениях многочленов Эрмита – Паде / А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко // Труды Московского математического общества – 2022. – Т. 83, № 1. – С. 17–35.

11. *Гончар, А.А.* Аппроксимации Паде – Чебышёва для многозначных аналитических функций, вариация равновесной энергии и *S*-свойство стационарных компактов / А.А. Гончар, Е.А. Рахманов, С.П. Суетин // УМН. – 2011. – Т. 66, № 6. – С. 3–36.

Поступила в редакцию 27.02.2024.

Информация об авторах

Старовойтов Александр Павлович – д.ф.-м.н., профессор
Оснач Татьяна Михайловна – аспирантка
Рябченко Наталия Валерьевна – к.ф.-м.н.