

## ЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ВИДЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ СУММ

А.П. Шилин

Белорусский государственный университет, Минск

## LINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH COEFFICIENTS IN THE FORM OF SPECIAL SUMS

A.P. Shilin

Belarusian State University, Minsk

**Аннотация.** Решено в явном виде новое линейное гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение первого порядка. Уравнение задано на замкнутой кривой, расположенной на комплексной плоскости. Коэффициенты уравнения выражаются в виде сумм некоторых слагаемых. Во все слагаемые сумм определенным образом входит конечное число одних и тех же заданных функций. Используются классические и обобщенные формулы Сохоцкого, теория краевой задачи Римана, формулы решения линейных дифференциальных уравнений, свойства аналитических функций. Решение проиллюстрировано примером.

**Ключевые слова:** интегро-дифференциальное уравнение, формулы Сохоцкого, краевая задача Римана, линейное дифференциальное уравнение.

**Для цитирования:** Шилин, А.П. Линейное интегро-дифференциальное уравнение с коэффициентами в виде специальных сумм / А.П. Шилин // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 77–80. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2024\\_3\\_60\\_77](https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_77). – EDN: JLQBBW

**Abstract.** A new linear hypersingular integro-differential equation of the first order has been explicitly solved. The equation is given on a closed curve located on the complex plane. The coefficients of the equation are expressed as sums of some summands. A finite number of the same functions are included in all summands of sums in a certain way. Classical and generalized Sokhotsky formulas, the theory of the Riemann boundary value problem, formulas for solving linear differential equations, properties of analytical functions are used. The solution is illustrated with an example.

**Keywords:** integro-differential equation, Sokhotsky formulas, Riemann boundary problem, linear differential equation.

**For citation:** Shilin, A.P. Linear integro-differential equation with coefficients in the form of special sums / A.P. Shilin // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 3 (60). – P. 77–80. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2024\\_3\\_60\\_77](https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_77) (in Russian). – EDN: JLQBBW

### Введение

Для развития теории интегро-дифференциальных уравнений важно выявлять такие случаи уравнений, которые допускают точное аналитическое решение. В [1] Э.И. Зверович указал решение линейного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, основанное на использовании обобщенных формул Сохоцкого. Настоящая работа примыкает к изучению тех пока немногих случаев переменных коэффициентов в подобных уравнениях (напр., [2], [3]), когда сохраняется возможность точного аналитического решения.

### 1 Постановка задачи

Пусть  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  и  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  – два каких-либо множества, элементы которых упорядочены и могут перемножаться,  $n \in \mathbb{N}$ . Будем составлять произведения вида  $A = c_1 c_2 \dots c_n$ , где

для каждого  $k = \overline{1, n}$  либо  $c_k = a_k$ , либо  $c_k = b_k$ .

Обозначим  $L_s(a_k, b_k; n)$  сумму всевозможных произведений вида  $A$  таких, в которых множители  $a_k$  встречаются  $s$  раз (и, следовательно, множители  $b_k$  встречаются  $n-s$  раз),  $s = \overline{0, n}$ . Например,

$$L_3(a_k, b_k; 5) = a_1 a_2 a_3 b_4 b_5 + a_1 a_2 b_3 a_4 b_5 + a_1 a_2 b_3 b_4 a_5 + a_1 b_2 a_3 a_4 b_5 + a_1 b_2 a_3 b_4 a_5 + a_1 b_2 b_3 a_4 a_5 + b_1 a_2 a_3 a_4 b_5 + b_1 a_2 b_3 a_4 a_5,$$

$$L_0(a_k, b_k; 2) = b_1 b_2, \quad L_1(a_k, b_k; 1) = a_1.$$

Обозначим через  $L$  простую гладкую замкнутую положительно ориентированную кривую на комплексной плоскости. Пусть  $D_+$  и  $D_-$  – соответственно внутренняя и внешняя области комплексной плоскости по отношению к этой кривой. Зададим  $H$ -непрерывные (т. е. удовлетворяющие условию Гельдера) функции  $f(t)$ ,

$p_k(t)$ ,  $k = \overline{1, n}$ ,  $t \in L$ . Пусть на кривой  $L$  существуют  $H$ -непрерывные производные  $p'_k(t)$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Будем искать на этой кривой  $H$ -непрерывную вместе со своей производной функцию  $\varphi(t)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} L_{2s} \left( p_k(t), \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{\tau - t}; n \right) \varphi'(t) - \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} L_{2s} \left( p'_k(t), \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2}; n \right) \varphi(t) + \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} L_{2s-1} \left( p_k(t), \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{\tau - t}; n \right) \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} - \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} L_{2s-1} \left( p'_k(t), \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2}; n \right) \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} = f(t), \quad t \in L. \quad (1.1)$$

Интегралы в уравнении понимаются в смысле конечной части по Адамару [4], [5]; интегралы с  $\tau - t$  в знаменателе совпадают при этом с интегралами, понимаемыми в смысле главного значения по Коши. Квадратные скобки означают целую часть числа. В частности, при  $n = 1$  получим уравнение

$$\frac{\varphi'(t) \int_L \frac{p_1(\tau) d\tau}{\tau - t} - \frac{\varphi(t) \int_L \frac{p_1(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2}}{\pi i} + \frac{p_1(t) \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} - \frac{p'_1(t) \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t}}{\pi i} = f(t), \quad t \in L,$$

способ решения которого указан в [6]. Считаем далее  $n \geq 2$ . Укажем еще развернутый вид уравнения (1.1) при  $n = 3$ :

$$\left( \frac{1}{\pi i} \int_L \left( \frac{p_1(t)p_2(t)p_3(\tau)}{\tau - t} + \frac{p_1(t)p_2(\tau)p_3(t)}{\tau - t} + \frac{p_1(\tau)p_2(t)p_3(t)}{\tau - t} \right) d\tau - \frac{1}{\pi^3 i} \int_L \frac{p_1(\tau) d\tau}{\tau - t} \int_L \frac{p_2(\tau) d\tau}{\tau - t} \int_L \frac{p_3(\tau) d\tau}{\tau - t} \right) \varphi'(t) - \left( \frac{1}{\pi i} \int_L \left( \frac{p'_1(t)p'_2(t)p_3(\tau)}{(\tau - t)^2} + \frac{p'_1(t)p_2(\tau)p'_3(t)}{(\tau - t)^2} + \frac{p_1(\tau)p'_2(t)p'_3(t)}{(\tau - t)^2} \right) d\tau - \frac{1}{\pi^3 i} \int_L \frac{p_1(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} \int_L \frac{p_2(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} \int_L \frac{p_3(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} \right) \varphi(t) + \left( p_1(t)p_2(t)p_3(t) - \frac{p_1(t)}{\pi^2} \int_L \frac{p_2(\tau) d\tau}{\tau - t} \int_L \frac{p_3(\tau) d\tau}{\tau - t} - \frac{p_2(t)}{\pi^2} \int_L \frac{p_1(\tau) d\tau}{\tau - t} \int_L \frac{p_3(\tau) d\tau}{\tau - t} - \frac{p_3(t)}{\pi^2} \int_L \frac{p_1(\tau) d\tau}{\tau - t} \int_L \frac{p_2(\tau) d\tau}{\tau - t} \right) \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} = f(t), \quad t \in L.$$

$$\begin{aligned} & - \frac{p_3(t) \int_L \frac{p_1(\tau) d\tau}{\tau - t} \int_L \frac{p_2(\tau) d\tau}{\tau - t}}{\pi^2} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} - \\ & - \left( p'_1(t)p'_2(t)p'_3(t) - \frac{p'_1(t)}{\pi^2} \int_L \frac{p_2(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} \int_L \frac{p_3(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} - \frac{p'_2(t)}{\pi^2} \int_L \frac{p_1(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} \int_L \frac{p_3(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} - \frac{p'_3(t)}{\pi^2} \int_L \frac{p_1(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} \int_L \frac{p_2(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} \right) \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} = f(t), \quad t \in L. \end{aligned} \quad (1.2)$$

## 2 Решение уравнения

Введем интегралы типа Коши

$$P_{k\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad k = \overline{1, n}, \quad z \in D_{\pm}.$$

Далее будем использовать классические и обобщенные формулы Сохоцкого [1], [4] для соответствующих предельных значений, являющихся  $H$ -непрерывными функциями на кривой  $L$ :

$$P_{k\pm}^{(m)}(t) = \pm \frac{1}{2} p_k^{(m)}(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{m+1}}, \quad k = \overline{1, n}, \quad m = 0, 1, \quad t \in L.$$

В результате коэффициент при  $\varphi'(t)$  в уравнении (1.1) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} L_{2s} \left( p_k(t), \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{\tau - t}; n \right) = \\ & = \frac{1}{2} \left( \prod_{k=1}^n \left( p_k(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{\tau - t} \right) + \prod_{k=1}^n \left( -p_k(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{\tau - t} \right) \right) = \\ & = 2^{n-1} \left( \prod_{k=1}^n \left( \frac{1}{2} p_k(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{\tau - t} \right) + \prod_{k=1}^n \left( -\frac{1}{2} p_k(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{\tau - t} \right) \right) = \\ & = 2^{n-1} \left( \prod_{k=1}^n P_{k+}(t) + \prod_{k=1}^n P_{k-}(t) \right). \end{aligned}$$

Аналогично преобразуя остальные коэффициенты уравнения (1.1), получим

$$\begin{aligned} & \left( \prod_{k=1}^n P_{k+}(t) + \prod_{k=1}^n P_{k-}(t) \right) \varphi'(t) - \\ & - \left( \prod_{k=1}^n P'_{k+}(t) + \prod_{k=1}^n P'_{k-}(t) \right) \varphi(t) + \\ & + \left( \prod_{k=1}^n P_{k+}(t) - \prod_{k=1}^n P_{k-}(t) \right) \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} - \\ & - \left( \prod_{k=1}^n P'_{k+}(t) - \prod_{k=1}^n P'_{k-}(t) \right) \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} = \frac{f(t)}{2^{n-1}}, \quad t \in L. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Введем еще интеграл типа Коши

$$\Phi_{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad z \in D_{\pm}.$$

После использования формул Сохоцкого

$$\varphi^{(m)}(t) = \Phi_+^{(m)}(t) - \Phi_-^{(m)}(t), \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{m+1}} = \Phi_+^{(m)}(t) + \Phi_-^{(m)}(t), \quad t \in L, \quad m = 0, 1,$$

уравнение (2.1) приобретает вид

$$\left( \prod_{k=1}^n P_{k+}(t) \right) \Phi_+'(t) - \left( \prod_{k=1}^n P_{k-}(t) \right) \Phi_-'(t) - \left( \prod_{k=1}^n P_{k+}'(t) \right) \Phi_+(t) + \left( \prod_{k=1}^n P_{k-}'(t) \right) \Phi_-(t) = \frac{f(t)}{2^n}, \quad t \in L,$$

который можно расценивать как краевую задачу Римана о скачке

$$\Psi_+(t) - \Psi_-(t) = \frac{f(t)}{2^n}, \quad t \in L, \quad (2.3)$$

для функций

$$\Psi_+(z) = \left( \prod_{k=1}^n P_{k+}(z) \right) \Phi_+'(z) - \left( \prod_{k=1}^n P_{k+}'(z) \right) \Phi_+(z), \quad z \in D_+, \quad (2.4)$$

$$\Psi_-(z) = \left( \prod_{k=1}^n P_{k-}(z) \right) \Phi_-'(z) - \left( \prod_{k=1}^n P_{k-}'(z) \right) \Phi_-(z), \quad z \in D_-. \quad (2.5)$$

Будем предполагать далее для простоты, что

$$P_{k\pm}(z) \neq 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad z \in D_{\pm} \cup L, \quad z \neq \infty. \quad (2.6)$$

Обозначим  $l$  – суммарный порядок нуля на бесконечности функций  $P_{k-}(z)$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Из соотношения (2.5) вытекает, что задачу Римана (2.3) следует решать в классе функций, имеющих на бесконечности нуль порядка по меньшей мере  $l + 2$ . Согласно [7] для разрешимости этой задачи необходимы и достаточны условия

$$\int_L f(t) t^k dt = 0, \quad k = \overline{0, l}, \quad (2.7)$$

которые далее предполагаем выполненными. Тогда

$$\Psi_{\pm}(z) = F_{\pm}(z), \quad F_{\pm}(z) = \frac{1}{2^{n+1} \pi i} \int_L \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad z \in D_{\pm}.$$

Теперь из соотношений (2.4), (2.5) находим функции  $\Phi_{\pm}(z)$  как решения линейных дифференциальных уравнений:

$$\Phi_{\pm}(z) = \left( \int_{z_{\pm}} \frac{F_{\pm}(\zeta) d\zeta}{\prod_{k=1}^n P_{k\pm}(\zeta)} \exp \left( - \int_{z_{\pm}} \frac{\prod_{k=1}^n P_{k\pm}'(\omega)}{\prod_{k=1}^n P_{k\pm}(\omega)} d\omega \right) + C_{\pm} \right) \times \exp \left( \int_{z_{\pm}} \frac{\prod_{k=1}^n P_{k\pm}'(\zeta)}{\prod_{k=1}^n P_{k\pm}(\zeta)} d\zeta \right), \quad z \in D_{\pm}, \quad (2.8)$$

где  $z_{\pm}$  – фиксированные точки в соответствующих областях  $D_{\pm}$ ,  $C_{\pm} \in \mathbb{C}$ . Следует также обеспечить выполнение условия  $\Phi_-(\infty) = 0$ , выражающего известное свойство интеграла типа Коши. Удобно в дальнейшем брать  $z_- = \infty$ , и тогда для выполнения этого условия должно быть  $C_- = 0$ . Отметим, что все интегралы в формулах (2.8) существуют и дают однозначные аналитические функции в соответствующих областях. При этом у функций  $\Phi_{\pm}(z)$  и у их производных существуют предельные  $H$ -непрерывные значения на  $L$ .

### 3 Основной результат. Пример

Теперь при  $m = 0$  из равенства (2.2) можно найти искомую функцию, а также заключить, что эта функция удовлетворяет предполагавшимся на нее требованиям. Таким образом, оказывается справедливым следующий результат.

**Теорема.** Для разрешимости уравнения (1.1) необходимо и достаточно выполнение условий (2.7). Если эти условия выполняются, то решение уравнения (1.1) содержит одну произвольную постоянную  $C_+$  и имеет вид

$$\varphi(t) = \left( \int_{z_+} \frac{F_+(\zeta) d\zeta}{\prod_{k=1}^n P_{k+}(\zeta)} \exp \left( - \int_{z_+} \frac{\prod_{k=1}^n P_{k+}'(\omega)}{\prod_{k=1}^n P_{k+}(\omega)} d\omega \right) + C_+ \right) \times \exp \left( \int_{z_+} \frac{\prod_{k=1}^n P_{k+}'(\zeta)}{\prod_{k=1}^n P_{k+}(\zeta)} d\zeta \right) - \int_{\infty} \frac{F_-(\zeta) d\zeta}{\prod_{k=1}^n P_{k-}(\zeta)} \times \exp \left( - \int_{\infty} \frac{\prod_{k=1}^n P_{k-}'(\omega)}{\prod_{k=1}^n P_{k-}(\omega)} d\omega \right) \exp \left( \int_{\infty} \frac{\prod_{k=1}^n P_{k-}'(\zeta)}{\prod_{k=1}^n P_{k-}(\zeta)} d\zeta \right).$$

В качестве примера приведем решение уравнения (1.2) на окружности  $|t - 1| = 0,5$ , взяв

$$p_1(t) = \sin t - \frac{1}{t-1}, \quad p_2(t) = \cos t - \frac{1}{t-1}, \quad p_3(t) = \frac{t^2 - 2}{t-1}, \quad f(t) = 8 \left( \sin 2t - \frac{1}{(t-1)^6} \right).$$

Легко вычислить, что

$$\frac{1}{\pi i} \int_{|\tau-1|=0,5} \frac{p_1(\tau) d\tau}{\tau - t} = \sin t + \frac{1}{t-1}, \quad \frac{1}{\pi i} \int_{|\tau-1|=0,5} \frac{p_2(\tau) d\tau}{\tau - t} = \cos t + \frac{1}{t-1}, \quad \frac{1}{\pi i} \int_{|\tau-1|=0,5} \frac{p_3(\tau) d\tau}{\tau - t} = t + 1 + \frac{1}{t-1},$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_{|t-1|=0,5} \frac{p_1(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} = \cos t - \frac{1}{(t-1)^2},$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_{|t-1|=0,5} \frac{p_2(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} = -\sin t - \frac{1}{(t-1)^2},$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_{|t-1|=0,5} \frac{p_3(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} = 1 - \frac{1}{(t-1)^2}.$$

Укажем сразу вид (2.1) уравнения в этом примере, получающийся после упрощения его коэффициентов:

$$\left( \sin t \cos t(t+1) + \frac{1}{(t-1)^3} \right) \varphi'(t) + \left( \sin t \cos t + \frac{1}{(t-1)^6} \right) \varphi(t) + \left( \sin t \cos t(t+1) - \frac{1}{(t-1)^3} \right) \frac{1}{\pi i} \int_{|t-1|=0,5} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} + \left( \sin t \cos t - \frac{1}{(t-1)^6} \right) \frac{1}{\pi i} \int_{|t-1|=0,5} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau-t} = 2 \left( \sin 2t - \frac{1}{(t-1)^6} \right), \quad |t-1|=0,5.$$

Соответствующая задача Римана (2.3) о скачке

$$\Psi_+(t) - \Psi_-(t) = \sin 2t - \frac{1}{(t-1)^6}, \quad |t-1|=0,5,$$

должна решаться в классе функций, имеющих на бесконечности нуль по меньшей мере 5-го порядка. Ее решение очевидно:

$$\Psi_+(z) = \sin 2z, \quad \Psi_-(z) = \frac{1}{(z-1)^6}.$$

Теперь уравнениям (2.4), (2.5) в случае примера легко придать вид

$$(z+1)\Phi'_+(z) + \Phi_+(z) = 2, \quad |z-1| < 0,5,$$

$$\Phi'_-(z) + \frac{1}{(z-1)^3} \Phi_-(z) = \frac{1}{(z-1)^3}, \quad |z-1| > 0,5,$$

а их решениями (с учетом условия  $\Phi_-(\infty) = 0$ ) будут функции

$$\Phi_+(z) = \frac{2z + C_+}{z+1}, \quad \Phi_-(z) = 1 - e^{\frac{1}{2(z-1)^2}}.$$

Наконец, получим решение примера

$$\varphi(t) = \Phi_+(t) - \Phi_-(t) = \frac{t-1+C_+}{t+1} + e^{\frac{1}{2(t-1)^2}}.$$

**Заключительное замечание**

Условия (2.6) можно ослабить, допуская у функций  $P_{k\pm}(z)$  конечное число нулей в областях  $D_{\pm}$ . Это приведет к дополнительным ограничениям на функцию  $f(t)$ , при выполнении которых метод решения уравнения сохранится.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Зверович, Э.И. Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами / Э.И. Зверович // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 6. – С. 5–8.

2. Шилин, А.П. Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение эйлера типа / А.П. Шилин // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 17–29. – DOI: <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-17-29>.

3. Шилин, А.П. Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с линейными функциями в коэффициентах / А.П. Шилин // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2022. – Т. 58, № 4. – С. 358–369. – DOI: <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-358-369>.

4. Зверович, Э.И. Обобщение формул Сохоцкого / Э.И. Зверович // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2012. – №2. – С. 24–28.

5. Адамар, Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. – Москва: Наука, 1978. – 352 с.

6. Зверович, Э.И. Решение интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными интегралами специального вида / Э.И. Зверович, А.П. Шилин // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 404–407. – DOI: <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407>.

7. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.

Поступила в редакцию 18.12.2023.

**Информация об авторе**

Шилин Андрей Петрович – к.ф.-м.н., доцент

УДК 621.791.35

DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2024\\_3\\_60\\_81](https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_81)  
EDN: JVEVVM**СБОРКА ЭЛЕКТРОННЫХ МОДУЛЕЙ ПРИЕМНИКОВ ИНФРАКРАСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРЕФОРМ ПРИПОЯ****А.Э. Видрицкий<sup>1</sup>, В.Л. Ланин<sup>2</sup>**<sup>1</sup>ОАО «ИНТЕГРАЛ», Минск<sup>2</sup>Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск**ASSEMBLY OF ELECTRONIC MODULES OF INFRARED RADIATION RECEIVERS WITH THE USE OF SOLDER PREFORMS****A.E. Vidritskiy<sup>1</sup>, V.L. Lanin<sup>2</sup>**<sup>1</sup>JSC "INTEGRAL", Minsk<sup>2</sup>Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

**Аннотация.** Описаны методы и режимы проведения технологических операций крепления преформ из припоя к основанию корпуса для монтажа кристалла и герметизации электронных модулей приёмников инфракрасного излучения, которые обеспечивают их надёжную фиксацию на металлизированных поверхностях. Определены зависимости прочности крепления преформ от режимов проведения операций.

**Ключевые слова:** приёмники инфракрасного излучения, монтаж кристаллов, герметизация, преформа, сварка, пайка.

**Для цитирования:** Видрицкий, А.Э. Сборка электронных модулей приёмников инфракрасного излучения с применением преформ припоя / А.Э. Видрицкий, В.Л. Ланин // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 81–85. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2024\\_3\\_60\\_81](https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_81). – EDN: JVEVVM

**Abstract.** The methods and modes of technological operations for attaching solder preforms to the base of the housing for mounting the crystal and sealing electronic modules of infrared receivers, which ensure their reliable fixation on metalized surfaces, are described. The dependences of the fastening strength of the preforms on the modes of operations are determined.

**Keywords:** infrared radiation receivers, crystal assembly, sealing, preform, welding, soldering.

**For citation:** Vidritskiy, A.E. Assembly of electronic modules of infrared radiation receivers with the use of solder preforms / A.E. Vidritskiy, V.L. Lanin // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 3 (60). – P. 81–85. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2024\\_3\\_60\\_81](https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_81) (in Russian). – EDN: JVEVVM

**Введение**

Расширение сферы применения тепловизионных и других ИК-приборов требует, наряду с повышением их чувствительности, понижения стоимости, энергопотребления, массы и высокой надёжности. Всем этим требованиям удовлетворяют неохлаждаемые матричные приёмники [1]. Тепловизоры, созданные на основе неохлаждаемых матричных микроболометров, в последнее время заняли доминирующее положение на рынке вследствие их низкой стоимости по сравнению с охлаждаемыми матричными фотоприёмными устройствами. Достоинством технологии создания микроболометров является их полная совместимость с КМОП кремниевой технологией, поскольку фоточувствительные элементы формируются непосредственно на кремниевой пластине, на которой уже предварительно создана интегральная схема считывания [2]. Типичный пиксель микроболометра состоит из навесной мембранной структуры, включающей слой, поглощающий ИК излучение и термочувствительный слой, преобразующий изменение темпе-

ратуры мембраны в электрический выходной сигнал [3].

В развитых странах индустрия, занимающаяся производством инфракрасных технических средств, приборов и систем, достигла внушительных масштабов и трансформировалась в обособленные секторы промышленности. Объем затрат на разработку и производство инфракрасных приборов исчисляется миллиардами долларов ежегодно.

Современным решением при сборке корпуса микроболометра является нанесение припоя в виде преформ. Преформы представляют собой отформованный припой, высеченный штамповкой с жесткими допусками. Для того чтобы обеспечить надёжность изделия в целом, процесс сборки необходимо проводить с использованием припоя для герметизации, имеющего разницу температур плавления с припоем для монтажа кристалла не менее 70–100°С [4].

В статье описывается процесс сборки микроболометров с использованием преформ припоя, который представляет собой сложную и

многоступенчатую процедуру, требующую высокой точности и профессионализма.

### 1 Конструкция фотоприемного устройства

Фотоприемное устройство состоит из следующих элементов (рисунок 1.1): основание корпуса; преформа из припоя для монтажа кристалла; кристалл – приемник ИК-излучения; преформа из припоя для герметизации; германиевое окно, которое выступает в роли крышки корпуса.

При выборе материала преформы необходимо принимать во внимание следующие факторы: [5]: прочность на разрыв, усталостная прочность, сопротивление сдвигу, вязкость разрушения (сопротивление развитию трещин), коэффициент термического расширения, теплопроводность.

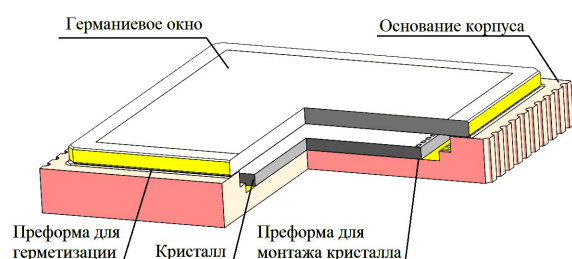


Рисунок 1.1 – Конструкция микроболметра

На основании вышеизложенного для монтажа кристаллов выбран припойный сплав 81Pb19In – температура плавления 260 / 275° С (солидус/ликвидус), прочность 17,65 МПа [6].

### 2 Исследование режимов крепления преформы для монтажа кристалла

Для проведения монтажа кристаллов в основание корпуса с требуемой точностью на малогабаритной вакуумной печи оплавления RSS-160-S разработана специальная графитовая оснастка, которая предусматривает загрузку основания корпуса дном вверх. Процесс пайки кристалла к основанию корпуса предусматривает предварительное размещение на монтажной площадке преформы (81Pb19In, температура плавления 280° С). С целью предотвращения смещения преформы необходимо предварительно ее закрепить на монтажной площадке. Ориентация преформы проводится под микроскопом по реперным знакам на монтажной площадке. Крепление преформ проводилось на универсальном комплексе УС.ИМ-227СК (рисунок 2.1), основные параметры которого приведены в таблице 2.1.

Для крепления преформы из материала 81Pb19In методом контактной сварки использовался расщепленный электрод ЭК1 20-80.

На рисунке 2.2 показана зависимость усилия на отрыв от величины сварочного напряжения.

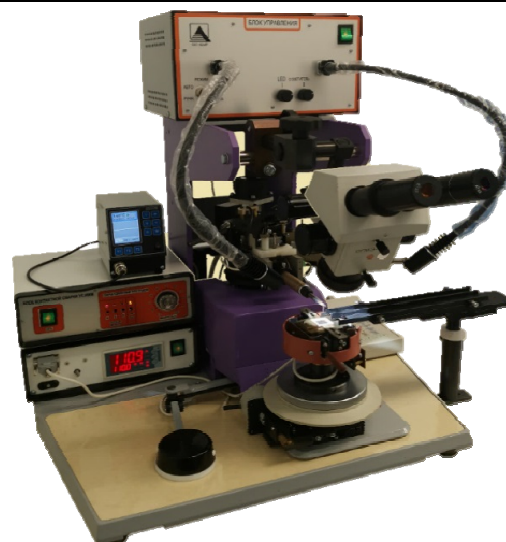


Рисунок 2.1 – Универсальный комплекс контактной микросварки УС.ИМ-227СК

Таблица 2.1 – Основные параметры универсального комплекса контактной микросварки УС.ИМ-227СК

Наименование параметра	Величина параметра
Режим сварки	Точечная сварка – пайка
Толщина (преформы / фольги), мкм	От 20 до 100
Тип применяемого инструмента	ЭК1, ИУ и аналоги
Выходная мощность блока контактной сварки, Вт	2,5–40,0
Программируемое сварочное напряжение для расщепленного электрода, В	0,1–4,0
Форма напряжения для расщепленного электрода	Меандр
Частота сигнала для расщепленного электрода, Гц	500–600
Время разогревающей ступени сварочного импульса, с	0,001–0,500
Программируемое время импульса для расщепленного электрода, с	0,001–9,999
Максимальная температура электрода при точечной микроспайке, °С	300
Диапазон регулирования температуры столика, °С	20–350
Диапазон усилия сжатия соединяемых элементов, Н	0,6–10
Точность присоединения преформы, мкм	± 50

Режимы, при которых была достигнута максимальная прочность на отрыв (~0,1Н для каждой точки) преформы от монтажной площадки следующие:



- усилие на электрод – 0,4 Н,
- количество импульсов – 20 шт,
- длительность импульса – 1 мс,
- пауза между импульсами 5 мс,
- сварочное напряжение 0,4 В,
- температура нагревательного стола – (125–135) °С,
- количество сварных точек – девять,
- размер точек присоединения – 50–100 мкм.

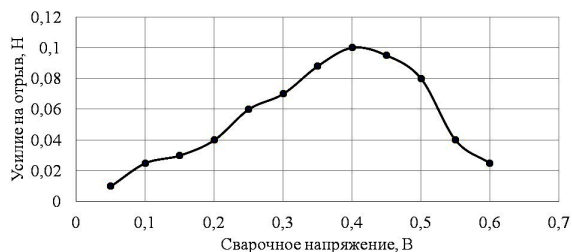


Рисунок 2.2 – Зависимость усилия на отрыв от величины сварочного напряжения

На рисунке 2.3 показан фрагмент преформы закрепленной на монтажной площадке основания корпуса со сварными точками от расщепленного электрода и внешний вид монтажной площадки после удаления преформы. Как видно из рисунка 2.3 – после удаления преформы на монтажной площадке осталась часть материала припоя, т. е. сцепление припоя с золотым покрытием выше прочности припоя.

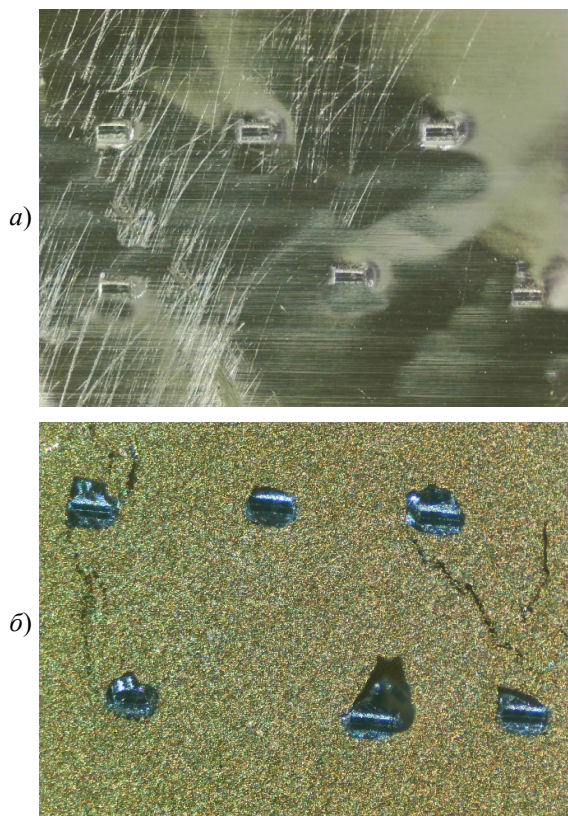


Рисунок 2.3 – Монтажная площадка основания корпуса с закрепленной преформой (а) и после ее отрыва (б)

Значительное отклонение от описанных режимов приводило к прожогу преформы либо к недостаточному ее оплавлению и как следствие – отсутствию хорошего сцепления с монтажной площадкой.

### 3 Исследование режимов крепления преформы для герметизации корпуса

Для проведения операции герметизации на высоковакуумной печи модели 3150 разработана специальная графитовая оснастка, которая предусматривает загрузку оснований корпусов с посаженными кристаллами дном корпуса вверх. Процесс герметизации предусматривает предварительное крепление на ободке основания преформы 80In15Pb5Ag (температура плавления 150 °С).

В процессе отработки крепления преформы методом пайки микросварочным инструментом ИУ2-100-300 на универсальном комплексе УС.ИМ-227СК опробовано несколько вариантов режимов. На рисунке 3.1 показана зависимость усилия на отрыв от температуры инструмента.

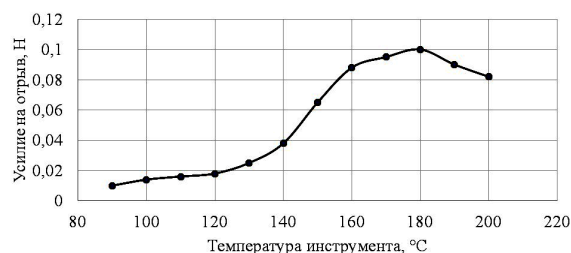


Рисунок 3.1 – Зависимость усилия на отрыв от температуры инструмента

Режимы, при которых была достигнута максимальная прочность на отрыв (~0,1Н для каждой точки) преформы от ободка основания корпуса, следующие:

- усилие на инструмент – 0,4 Н,
- время сварки – 6–8 секунд для каждой точки,
- температура нагревательного стола – 140–150° С,
- температура инструмента – 175–185° С,
- количество сварных точек 24.

Размер точек присоединения от 300 до 350 мкм.

На рисунке 3.2 показан фрагмент ободка основания корпуса с закрепленной преформой и после ее отрыва.

Из рисунка следует, что после удаления преформы на ободке основания корпуса остается часть материала припоя в точности повторяющая геометрическую форму микросварочного инструмента, что говорит о качественном проведении процесса. Значительное отклонение от описанных режимов приводило к прожогу преформы либо к недостаточному ее оплавлению и как следствие – отсутствию хорошего сцепления с ободком основания корпуса.

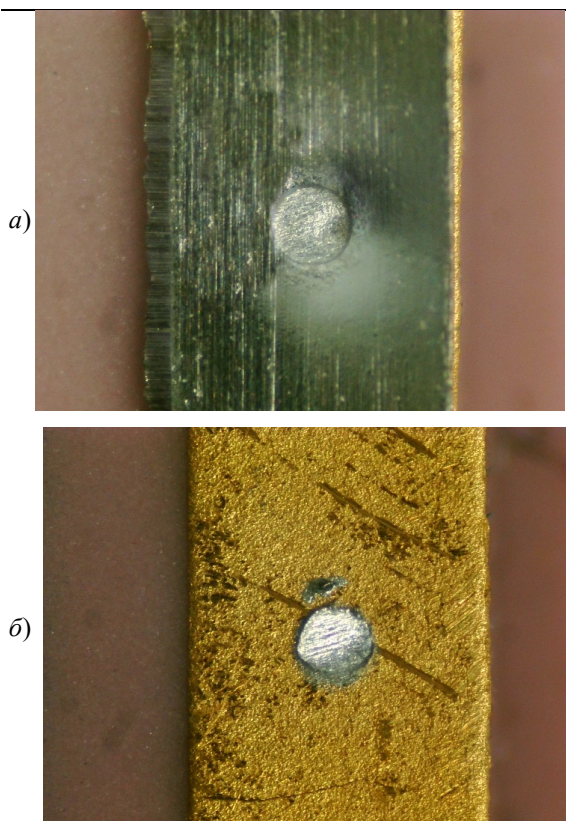


Рисунок 3.2 – Фрагмент ободка основания корпуса с закрепленной преформой (а) и после ее отрыва (б)

#### 4 Монтаж кристаллов приемников ИК излучения

Монтаж кристаллов во многом схож с аналогичным процессом для других изделий электронной техники, однако имеет следующие особенности:

- запрет на использование ультразвуковых колебаний во избежание разрушения матрицы пикселей,

- подъем температуры не свыше 320° С – характеристики терморезистора деградируют при превышении данной температуры.

После крепления преформы из материала 81In19Pb к основанию корпуса проведен монтаж кристалла на малогабаритной вакуумной печи оплавления RSS-160-S фирмы UniTemp (рисунок 4.1), техническая характеристика приведена в таблице 4.1.

На рисунке 4.2 приведен экспериментально оптимизированный термопрофиль процесса монтажа кристалла, который приводит к минимуму образования пустот в паяном шве «кристалл – монтажная площадка».

Ультразвуковое исследование паяного шва (рисунок 4.3) показало, что площадь пустот в паяном шве составляет не более 5%, что соответствует всем требованиям, предъявляемым к сборке.



Рисунок 4.1 – Малогабаритная вакуумная печь оплавления RSS-160-S ф. UniTemp

Таблица 4.1 – Техническая характеристика малогабаритной вакуумной печи оплавления RSS-160-S

Параметр	Значение параметра
Температура нагрева, °С	До 400, опционально до 500
Вакуум, мбар	До 10 <sup>-3</sup>
Нагреваемая рабочая зона, мм	160×160
Высота камеры, мм	40
Скорость нагрева, К/мин	Более 100
Скорость охлаждения, К/мин	Более 100

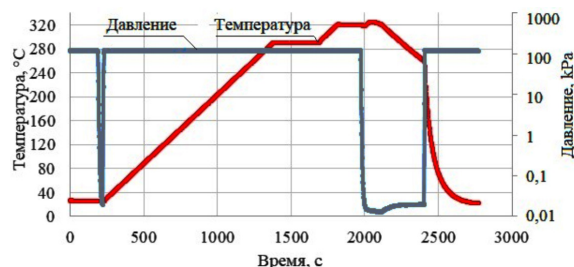


Рисунок 4.2 – Термопрофиль монтажа кристалла

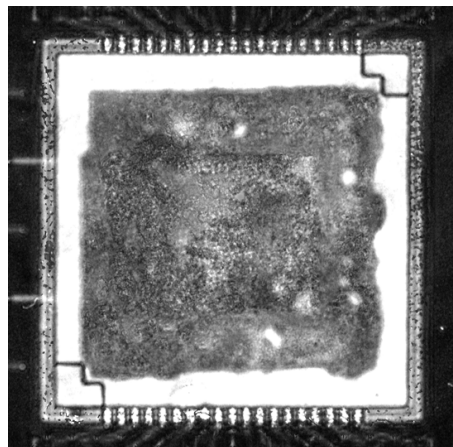


Рисунок 4.3 – Внешний вид паяного шва под кристаллом



### Заключение

Экспериментально установлены зависимости влияния температуры инструмента и величины сварочного напряжения расщепленного электрода на прочность крепления преформ из материалов 80In15Pb5Ag и 81In19Pb соответственно для монтажа кристалла и герметизации фотоприемного устройства.

Процесс сборки микроболометров является сложным и трудоемким, требующим высокой точности и профессионализма. Несмотря на это, разработка новых технологий и усовершенствование старых методов позволяют создавать эффективные микроболометрические сенсоры для различных областей применения

Важность данных технологий обусловлена их способностью обеспечивать высококачественное изображение в различных условиях освещенности, что делает их незаменимыми для систем видеонаблюдения, тепловизионных устройств и т. д.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Неохлаждаемые матричные микроболометрические приемники ИК излучения на основе золь-гель VO* / В.Н. Овсяк, В.В. Шашкин, М.А. Демьяненко [и др.] // Прикладная физика. – 2005. – № 6. – С. 114–117.
2. *О возможности создания комплексированного интегрального матричного фотоприемника для ИК и УФ диапазонов спектра на основе*

*микроболометров и карбида кремния* / В.С. Фещенко, А.А. Алтухов, А.Ю. Митягин [и др.] // Известия академии Инженерных Наук им. А.М. Прохорова. – 2013. – № 3. – С. 84–88.

3. *Performance Improvements for VOx Microbolometer FPAs* / D. Murphy, M. Ray, J. Wyles, J. Asbrock, C. Hewitt, R. Wyles, E. Gordon, T. Sessler, A. Kennedy, S. Baur, D. Van Lue // Proc. SPIE. 5406. – 2004. – P. 531–540.

4. *Видрицкий, А.* Вакуумплотная герметизация микроболометров / А. Видрицкий, В. Ланин // Электроника: Наука, Технология, Бизнес. – 2023. – № 2. – С. 60–66.

5. *Тимошенко, С.П.* Технологии вакуумной герметизации МЭМС / С.П. Тимошенко, А.Н. Бойко, Б.М. Симонов // Известия вузов. – Электроника. – 2010. – № 1. – С. 11–23.

6. *Edwards, L.K.* Viscoelastic behavior of 80In15Pb5Ag and 50Sn50Pb alloys / L.K. Edwards, R.S. Lakes, W.A. Nixon // Experiment and modeling. Journal of Applied Physics. – 2000. – № 87 (3). – P. 1135–1140. – DOI: 10.1063/1.371990.

Поступила в редакцию 15.04.2024.

### Информация об авторах

*Видрицкий Александр Эдуардович* – инженер  
*Ланин Владимир Леонидович* – д.т.н., профессор

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ АРХИТЕКТУРНЫХ ПЛАНОВ

Н.А. Аксенова

*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

## COMPARATIVE ANALYSIS OF FILTRATION ALGORITHMS FOR IMAGES OF ARCHITECTURAL PLANS

N.A. Aksionova

*Francisk Skorina Gomel State University*

**Аннотация.** Рассматривается применение сглаживающих фильтров для предварительной обработки изображений архитектурных планов. Проводится сравнительный анализ фильтров Гаусса и Рудина – Ошера – Фатемии (ROF) на базе модели Шамболя. Программные модули реализованы на языке программирования Python с использованием OpenCV. Результаты показали, что для предварительной обработки не сильно зашумленных изображений лучше применять фильтр Гаусса, а для изображений с высоким уровнем шума – фильтр ROF, предотвращающий потерю особых точек углов.

**Ключевые слова:** *предварительная обработка, фильтрация, шум, гауссово размытие, фильтр Гаусса, фильтр Рудина – Ошера – Фатемии, модель Шамболя, Python, OpenCV.*

**Для цитирования:** *Аксенова, Н.А. Сравнительный анализ алгоритмов фильтрации для изображений архитектурных планов / Н.А. Аксенова // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 86–91. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2024\\_3\\_60\\_86](https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_86). – EDN: HTGWNV*

**Abstract.** The use of smoothing filters for pre-processing images of architectural plans is considered. A comparative analysis of Gaussian and Rudin – Osher – Fatemi (ROF) filters based on the Chambolle model is carried out. The software modules are implemented in the Python programming language using OpenCV. The results showed that for pre-processing not very noisy images it is better to use a Gaussian filter, and for images with a high noise level it is better to use the ROF filter, which prevents the loss of special corner points.

**Keywords:** *preprocessing, filtering, noise, Gaussian blur, Gaussian filter, Rudin – Osher – Fatemi filter, Chambolle model, Python, OpenCV.*

**For citation:** *Aksionova, N.A. Comparative analysis of filtration algorithms for images of architectural plans / N.A. Aksionova // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 3 (60). – P. 86–91. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2024\\_3\\_60\\_86](https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_86) (in Russian). – EDN: HTGWNV*

### Введение

Одной из известных задач обработки изображений является задача шумоподавления, т. е. устранения или ослабления шума с целью повышения качества изображений или для предварительной обработки.

Существуют множество методов, таких как адаптивная медианная фильтрация [1], адаптивный фильтр Винера [2], методы, основанные на модели ROF (англ. Rudin – Osher – Fatemi) [3]–[5] и другие методы, основанные на уравнениях в частных производных и т. д.

В данной статье проводится сравнительный анализ фильтра Гаусса и фильтра ROF на базе модели Шамболя с целью выявить преимущества, недостатки и области эффективного применения. Оба метода широко применяются в алгоритмах обработки изображений, но каждый из них имеет свои уникальные характеристики.

Эффективность фильтра Гаусса в контексте удаления шума исследуется во множестве работ [7]–[11], поскольку он является одним из наиболее распространенных.

Фильтр Гаусса основан на математической концепции распределения Гаусса и применяется для сглаживания изображений путем уменьшения различий между значениями пикселей. Он работает путем замены каждого пикселя изображения средним значением его соседних пикселей, взвешенным по расстоянию. Этот метод позволяет сгладить фрагменты изображения, устраняя тем самым небольшие дефекты и шумы.

Основная идея фильтра ROF заключается в нахождении оптимальных значений для яркости пикселей в изображении, при которых будет достигаться минимальное значение общей вариации. Для этого алгоритм начинает с оценки значений пикселей и последовательно улучшает их путем минимизации ошибки оценки. Процесс повторяется

до тех пор, пока не будет достигнуто устойчивое состояние, когда ошибка оценки станет минимальной.

Фильтр ROF использует функционал, который минимизирует разность между исходным и очищенным изображением, при этом учитывает естественное разрежение градиента. Этот метод позволяет сохранить края и детали изображения, и одновременно удаляет шумы.

Целью работы является исследование алгоритмов фильтрации для предварительной обработки изображений архитектурных планов и их подготовка для процесса трехмерного моделирования.

### 1 Общая постановка задачи

Существует множество методов предварительной очистки изображений, и выбранный алгоритм шумоподавления зависит от типа шума, специфики входного изображения и направления процесса его использования. Изображения архитектурных планов содержат наборы различных контуров и углов, максимально контрастных по отношению к фону. В качестве входных изображений используются цифровые планы в форматах jpg, png или bmp, которые могут искажаться под действием фотосъемки или при сканировании. Для сокращения цветового диапазона входное изображение переводится в градации серого.

Поскольку входная информация представляет собой план-схемы квартир, домов, зданий и т. п., то в качестве ключевых особенностей были выбраны изолированные точки, представляющие углы строений. Ключевая точка – это некоторый участок изображения, который является отличительным [12].

В статьях [13], [14] описана разработка библиотеки детекторов углов на Python с использованием OpenCV и был представлен математический аппарат выбранных алгоритмов, проводился сравнительный анализ и апробация разработанных программных модулей.

После предварительной обработки изображение архитектурного плана импортируется в графический редактор Blender, где с помощью дополнительного программного модуля на нем определяются особые точки углов. Далее по этим ключевым точкам происходит процесс трехмерного конструирования. Предложенный способ конструирования позволяет облегчить процесс моделирования объектов зданий, помещений, квартир, домов и т. п., и создать цифровую модель по ее архитектурному плану за достаточно короткий промежуток времени.

Методика сравнительного анализа в данной работе включает следующие аспекты процесса исследования:

1. Эффективность алгоритма фильтрации.
2. Вычислительная сложность.
3. Точность сохранения особых точек углов и структуры границ.

### 2 Математические основы

*Алгоритм фильтра Гаусса.* Фильтр Гаусса основан на математической функции Гаусса (2.1), которая создает визуально мягкие переходы между пикселями изображения.

$$G_{\sigma, \mu_x, \mu_y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x-\mu_x)^2 + (y-\mu_y)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.1)$$

где  $(\mu_x, \mu_y)$  – математические ожидания по осям  $x$  и  $y$ ,  $\sigma$  – стандартное отклонение ( $\sigma^2$  – дисперсия), которое также называют радиусом этой функции или масштабом. Формула показывает, что двумерный фильтр Гаусса можно реализовать с помощью последовательного применения двух одномерных фильтров, в горизонтальном и в вертикальном направлении.

Нормальным распределением является распределение вероятностей, которое задается функцией плотности вероятности, для одномерного случая совпадающей с функцией Гаусса. Параметр  $\mu$  – это среднее значение математического ожидания распределения, его медиана и мода, а  $\sigma$  – среднеквадратическое отклонение распределения ( $\sigma^2$  – дисперсия). В природе нормальное распределение встречается часто, как и в различных приложениях. Широкое распространение нормального распределения основано на его бесконечной непрерывной делимости с конечной дисперсией. В теории вероятностей бесконечно делимым распределением называется такое распределение случайной величины, когда она может быть представлена в виде произвольного числа независимых, распределенных одинаково слагаемых.

Если гауссова функция центрирована, т. е. средние  $\mu_x = \mu_y = 0$ , то формула (2.1) упрощается до вида (2.2).

Функция Гаусса широко используется в обработке изображений и лежит в основе многих фильтров. В обработке изображений используется функция Гаусса со значениями параметров  $\mu_x = \mu_y = 0$ :

$$G_{\sigma}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\pi\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma^2} + \frac{y^2}{\sigma^2}\right)}. \quad (2.2)$$

Локальная свертка для входного изображения  $I$  при  $\sigma > 0$  определяется по формуле (2.3):

$$L(x, y, \sigma) = [I * G_{\sigma}](x, y). \quad (2.3)$$

Помимо эффективного способа хранения и представление изображений в виде свертки, фильтр Гаусса дает еще одно преимущество. Классическое представление цифровых изображений

в виде матрицы дискретных значений функции яркости не позволяет напрямую определить дифференциальные операторы, действующие на изображение. В то время как, благодаря свойству свертки, действие дифференциального оператора на изображение можно определить через производные функции Гаусса (гауссовы производные).

Гауссовы производные играют большую роль в обработке изображений. Они используются для обнаружения границ объектов и других особенностей на изображениях.

*Алгоритм ROF на базе модели Шамболя.*

При обработке изображений полное вариационное шумоподавление, также известное как полная вариационная регуляризация (суммарная вариационная фильтрация), представляет собой процесс удаления шума. Он основан на том принципе, что сигналы с чрезмерной и ложной детализацией имеют высокую общую вариацию, то есть интеграл величины градиента изображения высок. В соответствии с этим принципом уменьшение общего отклонения сигнала удаляет нежелательные детали, сохраняя при этом важные детали, такие как края и углы. Данное свойство является весомым аргументом для использования модели ROF, учитывая специфику входных изображений проектно-сметной документации, основу которых составляют контуры архитектурных планов.

Идея устранения шума на растровых изображениях сформирована на основе свойства полной вариации функции яркости: полная вариация функции яркости изображения стремится к минимуму для гладких изображений и становится значительной для негладких (зашумлённых), у которых функция яркости испытывает резкие колебания значений.

В данной статье приводится описание математической модели ROF на базе алгоритма Шамболя.

Полной вариацией полутонового изображения  $I$  называется сумма норм градиентов, которая в непрерывном представлении имеет вид:

$$J(I) = \int |\nabla I| dx. \quad (2.4)$$

В дискретной форме формула примет вид:

$$J(I) = \sum_x |\nabla I|, \quad (2.5)$$

где суммирование производится по всем точкам изображения  $X = [x, y]$ . Вариант модели ROF, предложенный Шамболем, находит очищенное от шума изображение  $U$ , для которого достигается минимум функции

$$\min_U \|I - U\|^2 + 2\lambda J(U), \quad (2.6)$$

где норма  $\|I - U\|$  измеряет разницу между исходным  $U$  и входным изображением  $I$ . Это означает, что данная модель ищет «плоское» изображение, но не допускающее «перескоков» на границах между областями.

*Свойства регуляризации.* Параметр регуляризации  $\lambda$  играет решающую роль в процессе шумоподавления. Когда  $\lambda = 0$ , сглаживание отсутствует, и результат такой же, как при минимизации суммы квадратов. Как  $\lambda \rightarrow \infty$ , однако член общей вариации играет все более сильную роль, что приводит к тому, что результат имеет меньшую общую вариацию за счет того, что он меньше похож на входной (зашумленный) сигнал. Таким образом, выбор параметра регуляризации имеет решающее значение для достижения нужного уровня удаления шума.

### 3 Методология эксперимента

Для экспериментально исследования был создан набор данных ArhiPlans, содержащий 468 изображений проектно-сметной документации. Для репрезентативности данного набора в выборку были добавлены синтетические изображения: сгенерированные нейросетями, зашумленные, содержащие размытие и высвеченные области.

Три набора данных «VectorArh», «PhotoArh» и «ScanArh» содержат реальные изображения архитектурных планов: в векторе, полученные с помощью фотосъемки и при сканировании. Четыре набора данных «GenerArh», «NoiseArh», «BlurArh» и «LightArh» содержат синтетические изображения: сгенерированные нейросетями, зашумленные, размытые и высвеченные соответственно.

Методика сравнительного анализа проводилась по скорости обработки и оценки сглаживания особых точек углов. В эксперименте использовались входные изображения размерами 480×640, 1440×1920 и 1920×2560 пикселей, маски фильтров размером 3×3 и 5×5 и дисперсии 0.5; 1.5; 3. Программные модули предварительной обработки изображений реализованы на языке Python с использованием библиотеки OpenCV.

Пример зашумленного входного изображения и его вид после предварительной обработки показаны на рисунке 3.1. Апробация алгоритма ROF показала, что детализация основных контуров и особых точек углов остаётся четкой, в то время как дополнительная информация (надписи, тонкие линии и т. д.) становятся размытыми, что уменьшает объем хранения и обработки информации.

На рисунке 3.2 показаны увеличенные фрагменты изображений, на которых распознавались особые точки углов. Увеличение радиуса для фильтра Гаусса на зашумленных изображениях приводит к сглаживанию углов, которые не будут определены.