Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 3

УДК 513.83 — *МАТЕМАТИКА*

В. В. ФИЛИППОВ

О БИКОМПАКТАХ С НЕСОВПАДАЮЩИМИ РАЗМЕРНОСТЯМИ ind и dim

(Представлено академиком П. С. Александровым 20 X 1969)

В настоящее время имеется большое число примеров бикомпактов с несовпадающими размерностями ind и dim (см. [1–4]). В настоящей заметке излагается ряд примеров такого сорта. В некоторых отношениях они лучше предыдущих.

§ 1*. Бикомпакт P с $\dim P = 1$, $\operatorname{ind} P = \operatorname{Ind} P = 2$. Обычный квадрат $I^2 = I \times I$, где $I = [0, 1]$, несет в себе эвклидову структуру (при которой сомножители ортогональны и длины 1), в связи с чем мы можем измерять величины углов. Под метрикой мы будем подразумевать эвклидову метрику.

В произведении $P = I^2 \times S$, где S — обычная окружность, введем несколько нестандартную топологию. Пусть $I_0 \subset I$ — множество рациональных точек отрезка, $I_0^2 \subseteq I_2$ — соответственно множество точек квадрата, обе координаты которых рациональны. Точки окружности S мы будем отождествлять с направлениями исходящих из точки лучей, считая нулевым направлением направление оси абсцисс. Пусть V — множество, открытое на окружности $\{x\} \times S$. Символом V^* обозначим: 1) объединение всех лежащих в I^2 лучей (без точки x), исходящих из точки x под углами, соответствующими точкам множества V, если $x \in I_0^2$; 2) объединение всех лежащих в I^2 окружностей (или, вернее, их пересечений с I^2) с центром в точке x и радиусами r такими, что $1/r$ измеряет угол, лежащий в V, если $x \in I^2 \setminus I_0^2$.

Пусть π: $P \to I^2$ — проекция на сомножитель, U — окрестность точки x в I^2. Окрестностью любой точки множества $V \subseteq \{x\} \times S$ объявим множество $V \cup \pi^{-1}(V^* \cap U)$. Как легко видеть, топология задана корректно и построенное пространство P является бикомпактом.

Оценка $\dim P \geqslant 1$ очевидна. Оценка $\dim P \leqslant 1$ получается следующим образом. Возьмем произвольное покрытие ω пространства P. Стянем в точки те множества вида $\{x\} \times S$, где $x \in I^2 \setminus I_0^2$, которые покрываются полностью хотя бы одним элементом покрытия (как легко видеть, таковыми множествами будут все, кроме, может быть, конечного числа). Это отображение будет ω-отображением бикомпакта P на метрический компакт, одномерность которого очевидна. Таким образом, $\dim P \leqslant 1$.

Пусть $V \subset P$ — любое открытое множество, дополнение до которого имеет непустую внутренность. Как легко видеть, в границе множества $\operatorname{Int} \pi(V)$ будет лежать некоторое связное неодноточечное множество F. Так как такое множество не может быть счетным, то найдется точка $x \in F \setminus I_0^2$. Тогда из связности множества F, задания топологии в P и замкнутости границы множества V получаем, что в границе множества V целиком лежит одномерное множество $\{x\} \times S$. Из сказанного следует, что $\operatorname{Ind} P \geqslant \operatorname{ind} P \geqslant 2$. Оценка $\operatorname{Ind} P \leqslant 2$ получается из очевидных геометрических соображений.

§ 2. Бикомпакт P_i с $\dim P_i = 1$, $\operatorname{ind} P_i = \operatorname{Ind} P_i = i$. Бикомпакт P был получен из квадрата вставлением вместо точек окружностей с «распределением» окрестностей точки «по секторам» — случай 1) или «по коль-

* Построение § 1—4 полезно сравнить с примером В. В. Федорчука.

цам» — случай 2). Но вместо окружностей во втором случае можно вставлять (ниже мы покажем как) уже построенный бикомпакт. Как и раньше, любая граница будет содержать целиком некоторый экземпляр вставляемого пространства, что поднимает индуктивные размерности не менее чем на единицу; dim же, как и раньше, будет равен 1. Однако точные оценки индуктивных размерностей сверху достигаются очень сложно. Поэтому мы несколько видоизменим геометрию примера.

В качестве P_1 возьмем квадрат, в котором все точки заменены на окружности со сходимостью по секторам. Пусть мы уже построили таким образом бикомпакт P_{i-1} с $\dim P_{i-1} = 1$, $\operatorname{ind} P_{i-1} = \operatorname{Ind} P_{i-1} = i - 1$. Пусть $\pi_{i-1}: P_{i-1} \to I^2$ — естественная проекция на квадрат. Пусть $f: (0, 1] \to I^2$ — не более чем двукратное отображение полуинтервала $(0, 1]$ в квадрат I^2, являющееся линейной параметризацией некоторой ломаной, такое что $[f((0, r))] = I^2$, если $0 < r \leqslant 1$.

Точку $x = (r_1, r_2)$ квадрата I^2 заменим на окружность со сходимостью по секторам, если $r_1 \neq 0$, и на бикомпакт P_{i-1}, если $r_1 = 0$. В последнем случае окрестности определим следующим образом. Пусть V — открытое в этом экземпляре бикомпакта P_{i-1} множество, $V^* = \operatorname{Int} \pi_{i-1}(V)$, V^{**} — объединение всех окружностей с центром в точке x и радиусами из $f^{-1}(V^*)$, U — окрестность точки x в I^2, $\pi_i: P_i \to I^2$ — проекция получающегося в результате вставок множества P_i на квадрат, склеивающая вставляемые множества в точки. Окрестностью любой точки из V назовем множество $V \cup \pi_i^{-1}(V^{**} \cap U)$.

Оценки $\dim P_i = 1$, $\operatorname{Ind} P_i \geqslant \operatorname{ind} P_i \geqslant i$ получаются почти так же, как и для бикомпакта P. Покажем, что $\operatorname{ind} P_i \leqslant i$. Для точек, лежащих в множествах $\pi_i^{-1}((r_1, r_2))$, где $r_1 \neq 0$, можно, очевидно, найти окрестности с нульмерными границами. Пусть $\pi_i(y) = (0, r_2) = x$, V_1 — окрестность точки y в подпространстве $\pi_i^{-1}(x)$ с $(i-2)$-мерной границей, $V = V_1 \cup \pi_i^{-1}(V_1^{**} \cap U)$ — строимая по ней окрестность точки y в пространстве P_i. Пусть y' — точка границы множества V_1. Мы можем найти сколь угодно мелкую окрестность V_2 точки y' в подпространстве $\pi_i^{-1}(x)$, являющуюся объединением счетного числа открытых подмножеств G_n, $n = 1, 2, \ldots, [G_n] \subset G_{n+1}$. Пусть V_2^{**}, $[G_n]^{**}$ — множества, строимые по V_2 и $[G_n]$ соответственно описанным выше способом. Эти множества состоят из концентрических колец. Пусть L — кольцо, являющееся компонентой открытого множества V_2^{**}, внутренний радиус которого больше $1/n$. Пусть L^* — кольцо, $[G_n]^{**} \cap L \subset L^* \subset L$, граница которого не пересекается с границей множества V_1^{**},— такое, как легко видеть, существует. Пусть Λ — объединение таких колец L^* по всем компонентам L множества V_2^{**}. Как легко видеть, множество $V_2 \cup \Lambda$ открыто в P_{i+1}, а пересечение его границы с границей множества V лежит в границе множества $V_1 \subset \pi_i^{-1}(x)$, а следовательно, имеет размерность $\leqslant i-2$. Для остальных точек границы множества V сколь угодно мелкие окрестности с границами размерности $\leqslant i-2$ находятся очевидным образом. Таким образом, ind границы множества V равен $i-1$, а следовательно, $\operatorname{ind} P_i \leqslant i$. Неравенство $\operatorname{Ind} P_i \leqslant i$ доказывается аналогично.

§ 3. Совершенно нормальный бикомпакт Q с $\dim Q = 1$, $\operatorname{ind} Q = \operatorname{Ind} Q = 2$. Этот бикомпакт мы построим в предположении, что $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Покажем, что если $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, то в квадрате I^2 существует множество L со следующими свойствами: а) пересечение множества L с любым нульмерным компактом не более чем счетно; б) каждый связный компакт содержит по меньшей мере одну точку множества L; в) $L \cap I_0^2 = \phi$.

Для этого занумеруем трансфинитами, меньшими ω_1, все нульмерные компакты, лежащие в I^2; занумеруем трансфинитами, меньшими ω_1, все связные компакты, лежащие в I^2. Как легко видеть, всякий нульмерный компакт нигде не плотен в любом содержащем его связном компакте, так что, если мы из связного компакта с номером $\alpha < \omega_1$ выбросим точки всех нульмерных компактов с меньшими номерами и точки множества I_0^2, то оставшееся множество будет непустым. Выберем в нем произвольно точку и обозначим ее x_α. Очевидно множество $L = \{x_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ удовлетворяет поставленным условиям.

Как легко видеть, в результате разбиения пространства P из § 1, неодноточечными элементами которого являются множества $\{x\} \times S$, где $x \in I^2 \setminus (I_0^2 \cup L)$, получается (хаусдорфов) бикомпакт Q. Пусть π': $Q \to I^2$ — отображение, порожденное проекцией π.

Покажем, что бикомпакт Q является совершенно нормальным. Для этого достаточно показать, что в любое семейство W открытых в Q множеств можно вписать не более чем счетное с тем же объединением. Пусть $\{u_1, u_2, \ldots\}$ — множество тех элементов некоторой счетной базы квадрата I^2, полные прообразы которых при π' вписаны в элементы семейства W. Как легко видеть, множества $\{\pi'^{-1}(u_1), \pi'^{-1}(u_2), \ldots\}$ не покрывают лишь множества M тех точек пространства Q, покрываемых семейством W, которые отображение π' переводит в границу множества $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} u_i$. Покажем, что множество $M_0 = \pi'(M)$ не более чем счетно. Для каждой точки $m \in M_0 \setminus \setminus I_0^2 \subset L$ выберем некоторую точку $x(m) \in \pi'^{-1}(m)$, покрываемую семейством W. В некотором элементе семейства W лежит окрестность точки $x(m)$ вида $V \cup (\pi'^{-1}(V^* \cap U))$ (см. построение пространства P), где U — ε-окрестность точки m. Пусть H_n — множество тех точек $m \in M_0$, у которых это $\varepsilon > 1/n$. Не составляет труда убедиться в том, что множество $[H_n]$ нульмерно, а потому $H_n \subset L$ не более чем счетно, так что счетно и множество $M_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_n \cup (M_0 \cap L_0^2)$. Для каждой точки $m \in M_0$ не составляет труда найти вписанное в W счетное семейство $V(m)$ открытых в Q множеств, покрывающих в $\pi'^{-1}(m)$ все, что покрывается семейством W. Тогда семейство $\{\pi'^{-1}(u_1), \pi'^{-1}(u_2), \ldots,\} \cup (\bigcup\limits_{m \in M_0} V(m))$, как легко видеть, будет счетным, будет вписано в семейство W и иметь то же что и W объединение. Таким образом, мы доказали, что бикомпакт Q совершенно нормален.

Оценки размерностей бикомпакта Q получаются так же, как и в предыдущих случаях.

§ 4. Совершенно нормальный бикомпакт Q_i с $\dim Q_i = 1$, $\operatorname{ind} Q_i = \operatorname{Ind} Q_i = i$. Эти бикомпакты строятся в предположении, что $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Бикомпакт $Q_2 = Q$ был нами уже построен. Индукция ведется так же как и в § 2. Пусть мы уже построили бикомпакт Q_{i-1}, $\pi'_{i-1} : Q_{i-1} \to I^2$ — отображение этого бикомпакта на квадрат. Пусть f': $(0, 1] \to I^2$ — не более чем двукратное отображение полуинтервала $(0, 1]$ в квадрат I^2, являющееся линейной параметризацией некоторой ломаной, такое, что $1/2n$-окрестность множества $f'((1/(n+1), 1/n))$ покрывает I^2. Заключающееся здесь отличие от соответствующего места § 2 необходимо для совершенной нормальности бикомпакта, который будет нами построен.

Точку $x \in I^2$ ни на что не заменяем, если $x \in I^2 \setminus (I_0^2 \cup L)$; заменяем на окружность со сходимостью по секторам, если $x \in I_0^2$; заменяем на бикомпакт Q_{i-1}, если $x \in L$. В последнем случае окрестности определим следующим образом. Пусть V — открытое в этом экземпляре бикомпакта Q_{i-1} множество, $V^* = \operatorname{Int} \pi'_{i-1}(V)$, V^{**} — объединение всех окружностей с центром в точке x и радиусами из $f'^{-1}(V^*)$, U — окрестность точки x в I^2, π_i': $Q_i \to I^2$ — проекция получающегося в результате вставок множества Q_i на квадрат, склеивающая вставляемые множества в точки. Окрестностью любой точки из V назовем множество $V \cup \pi'^{-1}_i (V^{**} \cap U)$.

Доказательство совершенной нормальности бикомпакта проводится так же как и в § 3.

Оценки размерностей получаются так же как и раньше.

§ 5. Замечания. Как легко видеть, построенные в § 2 и 4 ряды примеров можно продолжить до трансфинитных размерностей.

Взяв свободную сумму нужного числа бикомпактов и компактифицировав это локально бикомпактное пространство одной точкой, можно построить бикомпакты P_∞ и Q_∞ с $\dim P_\infty = 1$, $\operatorname{ind} P_\infty = \infty$, $\dim Q_\infty = 1$, $\operatorname{ind} Q_\infty = \infty$. Пусть $m \geqslant n$, $P_{m,\,n} = P_m \cup I^n$, $Q_{m,\,n} = Q_m \cup I^n$. Как легко видеть, $\dim P_{m,\,n} = n$, $\operatorname{ind} P_{m,\,n} = m$, $\dim Q_{m,\,n} = n$, $\operatorname{ind} Q_{m,\,n} = m$.

§ 6. Построение по бикомпакту R с $\dim R = l$, $\operatorname{ind} R = m$, $\operatorname{Ind} R = n$ бикомпакта R^* с $\dim R^* = l$, $\operatorname{ind} R^* = m + 1$, $\operatorname{Ind} R^* = n + 1$.

В множестве $C_0 = I \times I \times D$, где $D = \{0, 1\}$, введем лексикографический порядок следующим образом: $(r_1, r_2, r_3) > (r_1', r_2', r_3')$, если $r_1 > r_1'$, или $r_1 = r_1'$, $r_2 > r_2'$, или $r_1 = r_1'$, $r_2 = r_2'$, $r_3 > r_3'$.

Пусть $\varphi\colon \theta \to R$ — непрерывное отображение некоторого нульмерного бикомпакта θ на наш бикомпакт R. По крайней мере один такой бикомпакт θ существует — любой бикомпакт является образом некоторого замкнутого подмножества бикомпакта D^τ.

В множестве $C = C_0 \cup (I \times I \times \theta)$ введем топологию следующим образом. Множества $\{r_1\} \times \{r_2\} \times \theta$ будем считать открыто-замкнутыми подпространствами с топологией θ. Сходимость к точкам из C_0 интервальная, причем считается, что множество $\{r_1\} \times \{r_2\} \times \theta$ лежит между точками $(r_1, r_2, 0)$ и $(r_1, r_2, 1)$.

Пусть z — точка, не принадлежащая R. В множестве $I^* = I \times (\{z\} \cup R)$ введем топологию следующим образом. Множества $\{r\} \times R$, $r \in I$, будем считать открыто-замкнутыми подпространствами с топологией R. Стандартная окрестность точки $r \in I \times \{z\}$ имеет вид $(l \times (\{z\} \cup R)) \setminus (\{r\} \times R)$, где l — интервал в I.

В тихоновском произведении $R_1 = I^* \times C$ сделаем следующие склейки. В множестве $\{(r, z)\} \times (\{r_1\} \times \{r\} \times \theta)$ сделаем отождествление φ. Пусть R^* — получающийся в результате склеек бикомпакт.

Оценки $\dim R^* = l$, $\operatorname{ind} R^* \leqslant m + 1$, $\operatorname{Ind} R^* \leqslant n + 1$ очевидны. Стандартными рассуждениями, пример коих можно найти в ([4]), доказывается, что любая перегородка между точками $(0, z) \times (0, 0, 1)$ и $(1, z) \times (0, 0, 1)$ содержит экземпляр пространства R и, следовательно, $\operatorname{ind} R^* \geqslant m + 1$, $\operatorname{Ind} R^* \geqslant n + 1$.

Для того чтобы в бикомпакте R^* выполнялась первая аксиома счетности, необходимо и достаточно, чтобы она выполнялась в бикомпактах R и θ.

§ 7. Бикомпакт S_i с $\dim S_i = 1$, $\operatorname{ind} S_i = \operatorname{Ind} S_i = i$, $S_i = \bigcup\limits_{j=1} S_i^j$, где S_i^j — бикомпакт одномерный во всех смыслах.

Пусть мы уже построили бикомпакт S_{i-1}. Выполняя построения § 6, получаем бикомпакт S_i. Представление этого бикомпакта в виде объединения конечного числа одномерных во всех смыслах бикомпактов очевидно.

Выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю А. В. Архангельскому.

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
15 X 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. В. Локуциевский, ДАН, 67, № 2, 217 (1949). [2] А. Л. Лунц, ДАН, 66, № 5, 801 (1949). [3] В. В. Федорчук, ДАН, 182, № 2, 275 (1968). [4] В. В. Филиппов, ДАН, 186, № 5, 1020 (1969).