Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 5

УДК 511.9

МАТЕМАТИКА

Б. Г. КОЦАРЕВ

К ВОПРОСУ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЕ ДЛЯ ЧИСЛА РЕШЕНИЙ СРАВНЕНИЯ ВАРИНГОВСКОГО ТИПА

(Представлено академиком Ю. В. Линником 27 X 1969)

Рассмотрим сравнение

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_t^n \equiv d (\operatorname{mod} p^s), \tag{1}$$

где n, t, s — натуральные числа, p — простое, d — произвольное целое число. Пусть $M_1, \ldots, M_t$, $Q_1, \ldots, Q_t$ — целые числа, $0 \leqslant M_j < M_j + Q_j \leqslant p^s$, $j = 1, \ldots, t$. В работах А. А. Карацубы ([1], [2]) получена асимптотическая формула для числа решений сравнения (1) в неполной системе вычетов

$$M_j \leqslant x_j \leqslant M_j + Q_j - 1, \quad j = 1, \ldots, t. \tag{2}$$

Получить аналогичную асимптотическую формулу для числа решений сравнения (1) при $t = n$, вообще говоря, нельзя (см. ([2], [3])). В связи с этим представляет интерес изучение такого сравнения, которое в некотором смысле мало отличалось бы от сравнения (1) и для числа решений которого при $t = n$ можно было бы получить асимптотическую формулу. В настоящей работе рассматривается сравнение, получающееся из сравнения (1) при замене постоянного числа d переменной y, с небольшим интервалом изменения q и некоторые его обобщения при возможно меньшем числе переменных $x_1, \ldots, x_t$. Подобный подход к постановке задачи использован Ю. В. Линником ([4]) при рассмотрении бинарной проблемы Гольдбаха. Асимптотическая формула для числа решений полученного таким образом сравнения имеет место уже при $t = \min(n, s)$ и q, растущем сколь угодно медленно вместе с ростом p, либо при фиксированном $p \geqslant n + 1$ и q, растущем сколь угодно медленно вместе с ростом s, если $t \geqslant n + 1$. В работе ([5]) показано, что при $s \to \infty$ и $q = s$ аналогичная асимптотическая формула при $t = n$, вообще говоря, места не имеет.

Далее будем рассматривать сравнение

$$\sum_{j=1}^{\tau} \sum_{r_j=1}^{\alpha_j} a_{jr_j} x_{jr_j}^{n_j} \equiv y \ (\operatorname{mod} p^s), \tag{3}$$

где a_{jr_j}, n_j, $s \geqslant 3$ — целые числа, $(a_{jr_j}, p) = 1$, $3 \leqslant n_1 < \ldots < n_\tau < p$.

Пусть $t = \alpha_1 + \ldots + \alpha_\tau$, $l_j = \min(n_j, s)$; назовем гармоническим индексом сравнения (3) число N, определяемое следующим образом:

$$N = t \left(\sum_{j=1}^{\tau} \frac{\alpha_j}{l_j} \right)^{-1}.$$

Для сравнения (1) $N = \min(n, s)$. Обозначим через $T_q'(N)$ число решений сравнения (3), для которых выполняются неравенства (2) и $m \leqslant y \leqslant m + q - 1$, где m и q — целые числа, $0 \leqslant m < m + q \leqslant p^s$.

Т е о р е м а 1. *Пусть $t \geqslant N$, $\varepsilon > 0$ — действительное число, $1 \leqslant q \leqslant p^s$,*

$$p^{s(1/2 + 1/l_j + \varepsilon)} \leqslant Q_{jr_j} \leqslant p^s, \quad r_j = 1, \ldots, \alpha_j, \quad j = 1, \ldots, \tau. \tag{4}$$

Тогда для величины $T_q'(N)$ имеет место выражение

$$T_q'(N) = qQ_1 \ldots Q_t p^{-s} \{1 + Q(\gamma(q) \eta(t) \max(p^{-t/2+1}, p^{-l_1(t/N-1)}))\},$$

где

$$\gamma(q)=\begin{cases}1, & \text{если } q=1,\\ q^{-1}\ln q, & \text{если } q\geqslant 2;\end{cases}\qquad \eta(t)=\begin{cases}s, & \text{если } t=N,\\ 1, & \text{если } t>N.\end{cases}$$

Постоянная в символе O зависит только от $n_1,\ldots,n_\tau$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_\tau$ и ε.

Доказательство теоремы основывается на следующих леммах.

Лемма 1. *Пусть $f(x_1,\ldots,x_t)$ — целая рациональная функция с целыми коэффициентами от t переменных $x_1,\ldots,x_t$, $t\geqslant 1$; T — количество решений сравнения $f(x_1,\ldots,x_t)\equiv y\,(\mathrm{mod}\,p^s)$, для которых выполняются неравенства* (2), $m\leqslant y\leqslant m+q-1$.

Тогда

$$T=qQ_1\ldots Q_tp^{-s}+$$
$$+O\left(\gamma_0(q)\,p^{-s}\sum_{k=1}^{s}p^k\max_{z\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)}\left|\sum_{x_1=M_1}^{M_1+Q_1-1}\ldots\sum_{x_t=M_t}^{M_t+Q_t-1}\exp\frac{2\pi i}{p^k}zf(x_1,\ldots,x_t)\right|\right.$$

с абсолютной постоянной в символе O, $z\in[1,p^s-1]$; $\gamma_0(q)=1$, если $q=1$, $\gamma_0(q)=\ln q$, если $q\geqslant 2$.

Доказательство. Количество решений T выражаем через тригонометрическую сумму (см. [6], вопрос 1, а к главе IV)

$$T=p^{-s}\sum_{k=0}^{s}\sum_{\substack{z=1\\(z,\,p)=1}}^{p^k}\sum_{x_1=M_1}^{M_1+Q_1-1}\ldots\sum_{x_t=M_t}^{M_t+Q_t-1}\sum_{y=m}^{m+q-1}\exp\frac{2\pi i}{p^k}z\,(f(x_1,\ldots,x_t)-y).$$

Отсюда

$$|T-qQ_1\ldots Q_tp^{-s}|\leqslant$$
$$\leqslant p^{-s}\sum_{k=1}^{s}R(k)\max_{z\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)}\left|\sum_{x_1=M_1}^{M_1+Q_1-1}\ldots\sum_{x_t=M_t}^{M_t+Q_t-1}\exp\frac{2\pi i}{p^k}zf(x_1,\ldots,x_t)\right|,\qquad(5)$$

где

$$R(k)=\sum_{\substack{z=1\\(z,\,p)=1}}^{p^k}\left|\sum_{y=m}^{m+q-1}\exp\frac{2\pi i}{p^k}(-zy)\right|\leqslant\sum_{z=1}^{p^k-1}\frac{|\sin\pi zq/p^k|}{\sin\pi z/p^k}.\qquad(6)$$

Если $q=1$, то $R(k)<p^k$. При $q\geqslant 2$ для оценки $R(k)$ используем следующий результат Б. И. Голубова [7], полагая $M=p^k$.

Существует абсолютная постоянная $c_0>0$ такая, что

$$\sum_{z=1}^{M-1}\frac{|\sin\pi zq/M|}{\sin\pi z/M}\leqslant c_0M\ln q.\qquad(7)$$

Из формулы (5) и неравенств (6) и (7) следует утверждение леммы.

Лемма 2 (Хуа Ло-кен [8]). *Пусть a, q, P — целые числа, $(a,q)=1$, $q\geqslant 1$, $P\geqslant 1$, $n\geqslant 2$.*

Тогда для любого $\varepsilon>0$

$$\sum_{x=1}^{P}\exp\frac{2\pi i}{q}ax^n=\frac{P}{q}\sum_{x=1}^{q}\exp\frac{2\pi i}{q}ax^n+O(q^{1/2+\varepsilon}),$$

где постоянная в символе O зависит только от n и ε.

Лемма 3. *Пусть $f(x)=a_1x+\ldots+a_nx^n$ — многочлен степени $n\geqslant 2$ с целыми коэффициентами, $p>n$ — простое, $a_n\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)$, $s\geqslant 1$.*

Тогда имеет место оценка

$$\left|\sum_{x=1}^{p^s}\exp\frac{2\pi i}{p^s}f(x)\right|\leqslant\begin{cases}(n-1)\,p^{1/2}, & \text{если } s=1,\\ (n-1)\,p^{s-1}, & \text{если } 2\leqslant s\leqslant n,\\ c(n)\,p^{s(1-1/n)}, & \text{при любом } s\geqslant 1.\end{cases}$$

Доказательству первого из выписанных выше неравенств посвящены работы ([9, 10]) и § 2 книги А. Г. Постникова ([11]). Второе и третье неравенства доказаны соответственно в работах А. А. Карацубы ([12]) и Хуа Ло-кена (([13]), стр. 7—12). В случае, когда $f(x) = ax^n$, $(a, p) = 1$, лемма 3 вытекает из лемм И. М. Виноградова (([14]), стр. 269—271).

Доказательство теоремы 1. По лемме 1 имеем

$$T'_q(N) = qQ_1 \ldots Q_t p^{-s} + O\left(\gamma_0(q)\, p^{-s} \sum_{k=1}^{s} p^k S(k)\right), \tag{8}$$

где

$$S(k) = \prod_{j=1}^{\tau} \sum_{r_j=1}^{a_j} S_{jr_j}(k), \qquad S_{jr_j}(k) = \max_{z \not\equiv 0 \pmod p} \left| \sum_{x_{jr_j}=M_{jr_j}}^{M_{jr_j}+Q_{jr_j}-1} \exp \frac{2\pi i}{p^k} z a_{jr_j} x_{jr_j}^{n_j} \right|.$$

Выражение $S_{jr_j}(k)$ оцениваем по лемме 2

$$S_{jr_j}(k) = \max_{z \not\equiv 0 \pmod p} \frac{Q_{jr_j}}{p^k} \left| \sum_{x_{jr_j}=1}^{p^k} \exp \frac{2\pi i}{p^k} z a_{jr_j} x_{jr_j}^{n_j} \right| + O(p^{k(1/2+\varepsilon)}).$$

Оценивая модуль полной суммы в правой части последнего равенства по лемме 3, в зависимости от величины k получим

$$S_{jr_j}(k) \ll \begin{cases} Q_{jr_j} p^{-1/2}, & \text{если } k = 1, \\ Q_{jr_j} p^{-1}, & \text{если } 2 \leqslant k \leqslant n_j \\ Q_{jr_j} p^{-k/n_j}, & \text{если } n_j + 1 \leqslant k \leqslant s, \end{cases}$$

ввиду того, что Q_{jr_j} удовлетворяет неравенству (4). При оценке остаточного члена в формуле (8) будем разбивать сумму по k в соответствии с полученными выше оценками $S_{jr_j}(k)$. В зависимости от величины s рассматриваем следующие три случая.

1°. Если $s \leqslant n_1$, то

$$\sum_{k=1}^{s} p^k S(k) \ll Q_1 \ldots Q_t \left(p^{-t/2+1} + \sum_{k=2}^{s} p^{k-t}\right) \ll Q_1 \ldots Q_t \max(p^{-t/2+1}, p^{-s(t/N-1)}). \tag{9}$$

2°. Пусть $n_j < s \leqslant n_{j+1}$, где j — одно из чисел $1, \ldots, \tau - 1$ $(\tau \geqslant 2)$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{s} p^k S(k) \ll Q_1 \ldots Q_t \left(p^{-t/2+1} + \sum_{k=2}^{n_1} p^{k-t} + \right.$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{j-1} \sum_{k=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}} p^{k-(\alpha_{\nu+1}+\ldots+\alpha_\tau)-k(\alpha_1/n_1+\ldots+\alpha_\nu/n_\nu)} + \tag{10}$$
$$\left. + \sum_{k=n_j+1}^{s} p^{k-(\alpha_{j+1}+\ldots+\alpha_\tau)-k(\alpha_1/n_1+\ldots+\alpha_j/n_j)}\right) \ll Q_1 \ldots Q_t \max(p^{-t/2+1}, p^{-n_1(t/N-1)}).$$

3°. Если $s \geqslant n_\tau + 1$, то

$$\sum_{k=1}^{s} p^k S(k) \ll Q_1 \ldots Q_t \left(p^{-t/2+1} + \sum_{k=2}^{n_1} p^{k-t} + \right.$$
$$\left. + \sum_{\nu=1}^{\tau-1} \sum_{k=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}} p^{k-(\alpha_{\nu+1}+\ldots+\alpha_\tau)-k(\alpha_1/n_1+\ldots+\alpha_\nu/n_\nu)} + \sum_{k=n_\tau+1}^{s} p^{-k(t/N-1)}\right) \ll$$
$$\ll \eta(t)\, Q_1 \ldots Q_t \max(p^{-t/2+1}, p^{-n_1(t/N-1)}), \tag{11}$$

где $\eta(t)=s$ при $t=N$. Если $t>N$, то $tN^{-1}-1\geqslant N_0^{-1}$, где N_0 — общее наименьшее кратное чисел $n_1,\ldots,n_\tau$; следовательно,

$$\sum_{k=n_\tau+1}^{s} p^{-k(t/N-1)} < p^{-n_1(t/N-1)}(p^{t/N-1}-1)^{-1} \leqslant p^{-n_1(t/N-1)}).$$

Таким образом, при $t>N$ $\eta(t)=1$. Из формулы (8) и неравенств (9), (10) и (11) при $\gamma(q)=q^{-1}\gamma_0(q)$ следует доказываемая теорема.

Из сравнения результата А. А. Карацубы ([2]) и теоремы 1 получаем

Следствие. *Если $n\geqslant 20$, $t\geqslant cn$, где c — абсолютная постоянная, то имеет место асимптотическая формула*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} p^{-\nu t} \sum_{\substack{z=1\\(z,\,p)=1}}^{p^\nu} \Big(\sum_{x=1}^{p^\nu} \exp\frac{2\pi i}{p^\nu}zx^n\Big)^t \exp\Big(-\frac{2\pi i}{p^\nu}zd\Big)=1+O(p^{-t/2+1}),$$

где постоянная в символе O зависит только от n и t.

Пусть $f_j(x_j)=a_{1j}x_j+\ldots+a_{n_jj}x_j^{n_j}$ — многочлен степени $n_j\geqslant 2$ с целыми коэффициентами, $(a_{n_jj},\ p)=1$, $j=1,\ldots,t$; $p>\max(n_1,\ldots,n_t)$, $s\geqslant 2$. Обозначим через $T_q(N)$ число решений сравнения

$$f_1(x_1)+\ldots+f_t(x_t)\equiv y \pmod{p^s}, \tag{12}$$

когда $x_1,\ldots,x_t$ пробегают полную систему вычетов по модулю p^s, $m\leqslant y\leqslant m+q-1$.

Теорема 2. *Если $t\geqslant N$, где N — гармонический индекс сравнения (12), $1\leqslant q\leqslant p^s$, то для $T_q(N)$ имеет место выражение*

$$T_q(N)=qp^{s_1(t-1)}\ \{1+O(\gamma(q)\eta(t)\max(p^{-t/2+1},\ p^{-(t/N-1)\min(n_1,\ldots,n_t,s)}))\}.$$

Постоянная в символе O зависит только от $n_1,\ldots,n_t$; значения $\gamma(q)$ и $\eta(t)$ определяются условиями теоремы 1.

Автор приносит глубокую благодарность К. А. Родосскому за постоянное внимание к его работе и ценные советы.

Воронежский государственный
педагогический институт

Поступило
6 IX 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Карацуба, Вестн. МГУ, 1, 38 (1962). [2] А. А. Карацуба, Докторская диссертация, М., 1965. [3] А. А. Карацуба, ДАН, **169**, № 1, 9 (1966). [4] Ю. В. Линник, Изв. АН СССР, сер. матем., 16, 503 (1952). [5] Б. Г. Коцарев, Сборн. Исследования по теории чисел, в. 3, Саратов, 1969, стр. 42. [6] И. М. Виноградов, Основы теории чисел, М., 1965. [7] Б. И. Голубев, Сибирск. матем. журн., 9, № 2, 297 (1968). [8] L. K. Hua, Sci. Record, 1, № 1, 1 (1957). [9] A. Weil, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 34, № 5, 204 (1948). [10] L. Carlitz, S. Uchiyama, Duke Math. J., 24, № 1, 37 (1957). [11] А. Г. Постников, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 82 (1966). [12] А. А. Карацуба, Изв. АН СССР, сер. матем., **30**, № 1, 183 (1966). [13] Хуа Ло-кен, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 22 (1947). [14] И. М. Виноградов, Изобр. тр., М., 1952.