Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 1

УДК 519.8

МАТЕМАТИКА

В. Ф. ДЕМЬЯНОВ

НАХОЖДЕНИЕ СЕДЛОВЫХ ТОЧЕК НА МНОГОГРАННИКАХ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 13 X 1969)

Для разыскания седловых точек в ([1–4]) были предложены различные методы. Ниже рассматривается случай, когда множества изменения переменных суть многогранники. Многие другие множества могут часто быть достаточно хорошо описаны многогранниками.

Пусть в эвклидовом пространстве E_n задано множество

$$\Omega_1 = \{x \mid (A_i, x) + \alpha_i \leqslant 0,\ i \in \overline{1, N_1}\},$$

а в пространстве E_m — множество

$$\Omega_2 = \{y \mid (B_j, y) + b_j \leqslant 0,\ j \in \overline{1, N_2}\}.$$

Без ограничения общности предполагаем, что

$$\|A_i\| = 1,\ i \in \overline{1, N_1}; \quad \|B_j\| = 1,\ j \in \overline{1, N_2},$$

и что множества Ω_1 и Ω_2 ограничены.

На $\Omega_1 \times \Omega_2$ задана дважды непрерывно дифференцируемая функция $f(x, y)$, строго выпуклая по x и строго вогнутая по y на $\Omega_1 \times \Omega_2$, т. е. существуют такие $M_1 > 0$ и $M_2 > 0$, что для всех $[x, y] \in \Omega_1 \times \Omega_2$ и всех $V \in E_n$, $W \in E_m$ имеют место неравенства

$$\left(V, \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} V\right) \geqslant M_1 \|V\|^2, \quad -\left(W, \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} W\right) \geqslant M_2 \|W\|^2.$$

Требуется найти седловую точку функции f на $\Omega_1 \times \Omega_2$, т. е. точку $[x^*, y^*] \in \Omega_1 \times \Omega_2$, удовлетворяющую неравенствам

$$f(x^*, y) \leqslant f(x^*, y^*) \leqslant f(x, y^*) \tag{1}$$

для всех $x \in \Omega_1$, $y \in \Omega_2$.

Пусть $x \in \Omega_1$, $y \in \Omega_2$. Введем в рассмотрение индексные множества

$$Q_1(x) = \{i \mid i \in \overline{1, N_1},\ (A_i, x) + a_i = 0\},$$

$$Q_2(y) = \{j \mid j \in \overline{1, N_2},\ (B_j, y) + b_j = 0\},$$

а также конусы

$$\Gamma_1^+(x) = \left\{g \mid g \in E_n,\ g = -\sum_{i \in Q_1(x)} \alpha_i A_i,\ \alpha_i \geqslant 0\right\},$$

$$\Gamma_2^+(y) = \left\{q \mid q \in E_m,\ q = -\sum_{j \in Q_2(y)} \beta_j B_j,\ \beta_j \geqslant 0\right\}.$$

Если $Q_1(x) = \phi$, то $\Gamma_1^+(x) = \{0\}$, а если $Q_2(y) = \phi$, то $\Gamma_2^+(y) = \{0\}$. Введем также функции

$$d_1(x, y) = \min_{z \in \Gamma_1^+(x)} \|z - \partial f(x, y)/\partial x\| = \|z_1(x, y) - \partial f(x, y)/\partial x\|,$$

$$d_2(x, y) = \min_{z \in \Gamma_2^+(y)} \|z + \partial f(x, y)/\partial y\| = \|z_2(x, y) + \partial f(x, y)/\partial y\|.$$

Отметим, что для любого $[x, y] \in \Omega_1 \times \Omega_2$ точки $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ единственны.

Если $d_1(x, y) > 0$, то направление

$$g(x, y) = \| z_1(x, y) - \partial f(x, y) / \partial x \|^{-1}(z_1(x, y) - \partial f(x, y) / \partial x)$$

является направлением наискорейшего спуска функции $f_1(z) \equiv f(z, y)$ в точке $z = x$; а если $d_2(x, y) > 0$, то направление

$$q(x, y) = \|z_2(x, y) + \partial f(x, y) / \partial y\|^{-1}(z_2(x, y) + \partial f(x, y) / \partial y)$$

есть направление наискорейшего спуска функции $f_2(z) \equiv -f(x, z)$ в точке $z = y$.

Из теоремы 1 работы ([2]) может быть доказана

Теорема 1. *Для того чтобы точка $[x^*, y^*] \in \Omega_1 \times \Omega_2$ была седловой точкой функции f на множестве $\Omega_1 \times \Omega_2$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$d_1(x^*, y^*) = d_2(x^*, y^*) = 0. \tag{2}$$

Геометрически необходимое условие (2) означает, что в седловой точке должно быть

$$\partial f(x^*, y^*) / \partial x \in \Gamma_1{}^+(x^*), \qquad \partial f(x^*, y^*) \partial y \in \Gamma_2{}^+(y^*). \tag{3}$$

Для любого $\varepsilon \geqslant 0$ рассмотрим множества

$$Q_{1\varepsilon}(x) = \{i | i \in \overline{1, N_1}, \ -\varepsilon \leqslant (A_i, x) + a_i \leqslant 0\},$$
$$Q_{2\varepsilon}(y) = \{j | j \in \overline{1, N_2}, \ -\varepsilon \leqslant (B_j, y) + b_j \leqslant 0\}$$

и конусы

$$\Gamma_{1\varepsilon}^+(x) = \left\{g \mid g \in E_n, \quad g = - \sum_{i \in Q_{1\varepsilon}(x)} \alpha_i A_i, \ \alpha_i \geqslant 0\right\},$$

$$\Gamma_{2\varepsilon}^+(y) = \left\{q \mid q \in E_m, \quad q = - \sum_{j \in Q_{2\varepsilon}(y)} \beta_j B_j, \beta_j \geqslant 0\right\}.$$

Пусть

$$d_{1\varepsilon}(x, y) = \min_{z \in \Gamma_{1\varepsilon}^+(x)} \| z - \partial f(x, y)/\partial x \| = \| z_{1\varepsilon}(x, y) - \partial f(x, y)/\partial x \| \equiv \| g_\varepsilon(x, y) \|,$$

$$d_{2\varepsilon}(x, y) = \min_{z \in \Gamma_{2\varepsilon}^+(y)} \| z + \partial f(x, y)/\partial y \| = \| z_{2\varepsilon}(x, y) + \partial f(x, y)/\partial y \| \equiv \| q_\varepsilon(x, y) \|.$$

Можно показать, что всегда найдется такое представление точки $z_{1\varepsilon}(x, y)$ в виде

$$z_{1\varepsilon}(x, y) = - \sum_{i \in Q_{1\varepsilon}(x)} \alpha_i(x, y) A_i,$$

что если $\alpha_i(x, y) > 0$, то обязательно

$$i \in \bar{Q}_{1\varepsilon}(x, y) \equiv \{i | i \in Q_{1\varepsilon}(x), \ (A_i, g_\varepsilon(x, y)) = 0\}.$$

Аналогично показывается существование такого представления точки $z_{2\varepsilon}(x, y)$ в виде

$$z_{2\varepsilon}(x, y) = - \sum_{j \in Q_{2\varepsilon}(y)} \beta_j(x, y) B_j,$$

что для тех j, для которых $\beta_j(x, y) > 0$, будет

$$j \in \bar{Q}_{2\varepsilon}(x, y) \equiv \{j | j \in Q_{2\varepsilon}(y), \ (B_j, q_\varepsilon(x, y)) = 0\}.$$

Для остальных $i \in Q_{1\varepsilon}(x)$ и $j \in Q_{2\varepsilon}(y)$ имеем

$$(A_i, g_\varepsilon(x, y)) \equiv (A_i, z_{1\varepsilon}(x, y) - \partial f(x, y) / \partial x) \leqslant 0,$$
$$(B_j, q_\varepsilon(x, y)) \equiv (B_j, z_{2\varepsilon}(x, y) + \partial f(x, y) / \partial y) \leqslant 0.$$

Конечно, могут существовать и другие представления точек $z_{1\varepsilon}(x, y)$ и $z_{2\varepsilon}(x, y)$ (например, если среди векторов $\{A_i\}$ (или $\{B_j\}$) есть линейно зависимые). Точку $[x, y] \in \Omega_1 \times \Omega_2$ будем называть ε-седловой точкой функции f на множестве $\Omega_1 \times \Omega_2$, если

$$d_{1\varepsilon}(x, y) = d_{2\varepsilon}(x, y) = 0. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$d_\varepsilon(x, y) = {}^1/_2\,[d_{1\varepsilon}^2(x, y) + d_{2\varepsilon}^2(x, y)].$$

Ясно, что условие (4) эквивалентно условию $d_\varepsilon(x, y) = 0$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Опишем следующий метод последовательных приближений для нахождения ε-седловой точки.

В качестве первого приближения выберем произвольную точку $[x_1, y_1] \in \Omega_1 \times \Omega_2$. Пусть $[x_k, y_k] \in \Omega_1 \times \Omega_2$ уже найдено. Если $d_\varepsilon(x_k, y_k) = 0$, то точка $[x_k, y_k]$ является ε-седловой, и процесс прекращается. Если же $d_\varepsilon(x_k, y_k) > 0$, то рассмотрим лучи

$$x_{k\alpha} = x_k + \alpha\left(z_{1\varepsilon}(x_k, y_k) - \frac{\partial f\,(x_k, y_k)}{\partial x}\right) \equiv x_k + \alpha g_k,$$

$$y_{k\alpha} = y_k + \alpha\left(z_{2\varepsilon}(x_k, y_k) + \frac{\partial f\,(x_k, y_k)}{\partial y}\right) \equiv y_k + \alpha q_k,$$

найдем $\alpha_k > 0$ такое, что

$$d_\varepsilon(x_{k\alpha_k}, y_{k\alpha_k}) = \min_{\alpha \geq 0} d_\varepsilon(x_{k\alpha}, y_{k\alpha}), \quad x_{k\alpha} \in \Omega_1,\ y_{k\alpha} \in \Omega_2,$$

и положим

$$x_{k+1} = x_{k\alpha_k}, \quad y_{k+1} = y_{k\alpha_k}.$$

Ясно, что $(x_{k+1}, y_{k+1}) \in \Omega_1 \times \Omega_2$, $d_\varepsilon(x_{k+1}, y_{k+1}) \leqslant d_\varepsilon(x_k, y_k)$. Далее продолжаем аналогично.

Таким образом строим последовательность $\{[x_k, y_k]\} \subset \Omega_1 \times \Omega_2$. Если эта последовательность содержит конечное число точек, то последняя полученная точка по построению является ε-седловой точкой функции f на $\Omega_1 \times \Omega_2$. В противном случае справедлива

Т е о р е м а 2. *Любая предельная точка последовательности* $\{[x_k, y_k]\}$ *является ε-седловой точкой функции f на множестве* $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Если мы заинтересованы в нахождении седловой точки (а не ε-седловой точки), то можем применить следующий алгоритм.

Фиксируем любое $\varepsilon_1 > 0$ и, используя описанный выше метод при $\varepsilon = \varepsilon_1$, в конечное число шагов находим точку $[x_1, y_1] \in \Omega_1 \times \Omega_2$ такую, что

$$d_{\varepsilon_1}(x_1, y_1) \leqslant a\varepsilon_1,$$

где $a > 0$ — любое фиксированное число, не зависящее от k. Теперь полагаем $\varepsilon_2 = {}^1/_2\varepsilon_1$ и берем в качестве первого приближения полученную точку $[x_1, y_1]$; снова применяя основной алгоритм при $\varepsilon = \varepsilon_2$, в конечное число шагов получаем точку $[x_2, y_2]$ такую, что $d_{\varepsilon_2}(x_2, y_2) \leqslant a\varepsilon_2$. Далее продолжаем аналогично. Нетрудно показать, что последовательность $\{[x_k, y_k]\}$ стремится к седловой точке функции f на $\Omega_1 \times \Omega_2$.

З а м е ч а н и е. Если функция $f(x, y)$ является выпукло-вогнутой, то вместо нее можно рассмотреть строго выпукло-вогнутую функцию

$$F(x, y) = f(x, y) + cx^2 - dy^2,$$

где $c > 0$ и $d > 0$ — произвольные числа. При малых c и d функция $F(x, y)$ не очень отличается от $f(x, y)$.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
7 X 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Ф. Д е м ь я н о в, ДАН, 177, № 1, 21 (1967). [2] В. Ф. Д е м ь я н о в, Вестн. Ленинградск. унив., 19, 25 (1967). [3] Д. М. Д а н с к и н, Сборн. Бесконечные антагонистические игры, М., 1963, стр. 123. [4] Д ж. Р о б и н с о н, Сборн. Матричные игры, М., 1961, стр. 110.