В. Н. Капшай, С. П. Кулешов, Н. Б. Скачков, Об одном классе точных решений квазипотенциальных уравнений, *ТМФ*, 1983, том 55, номер 3, 349–360

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 55, № 3
июнь, 1983

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Капшай В. Н., Кулешов С. П., Скачков Н. Б.

Показано, что квазипотенциальные уравнения [1, 2] могут быть сведены к дифференциальным уравнениям второго порядка в пространстве быстрот, если квазипотенциалы выбрать в виде локальных в импульсном пространстве Лобачевского функций, образы которых в релятивистском конфигурационном представлении должны быть, в свою очередь, четными функциями по r. Для квазипотенциалов вида $V(r)\sim r^{-2}$, $(r^2\pm a^2)^{-1}$ в киральном пределе, когда масса связанного состояния равна нулю, получены точные волновые функции.

1. ВВЕДЕНИЕ

Квазипотенциальные уравнения, впервые выведенные в квантовой теории поля в работах А. А. Логунова и А. Н. Тавхелидзе, широко используются в различных задачах, связанных с изучением взаимодействий элементарных частиц. В связи с этим весьма актуальной является задача развития методов решения этих уравнений. Важное значение при этом имеет тот факт, что в импульсном представлении квазипотенциальные уравнения сводятся к одномерным интегральным уравнениям, подобным уравнению Липмана — Швингера. Это существенно облегчает по сравнению с уравнением Бете — Солпитера действия с ними. Однако тем не менее точные решения квазипотенциальных уравнений, записанных в интегральном виде, имеются лишь для немногих частных случаев квазипотенциалов.

Известно также, что в нерелятивистской теории решения уравнения Шредингера в большинстве случаев ищутся не в импульсном, а в координатном представлении, где уравнение принимает вид дифференциального. Но в квазипотенциальных уравнениях в силу заложенной в них релятивистской кинематики использование обычного фурье-преобразования по нерелятивистским плоским волнам e^{ipx} мало что упрощает при нахождении их решений, т. к. в общем случае в таком обычном пространстве квазипотенциальное уравнение принимает или нелокальный вид, или становится интегродифференциальным [3, 4].

В работе [5] было показано, что использование фурье-анализа на группе Лоренца позволяет переписать квазипотенциальное уравнение в релятивистском конфигурационном представлении, где оно после перехода к радиальным переменным принимает вид локального разностного уравнения, которое допускает нахождение точных решений для целого ряда квазипотенциалов. Однако решения разностных уравнений для волновых функций в общем случае могут быть найдены лишь с точностью до множителей, являющихся периодическими функциями относительно сдвигов аргумента на шаг разностного уравнения [5, 6]. Эти периодические функции не затрудняют нахождение спектров связанных состояний, а на больших расстояниях, где решения должны переходить в нерелятивистские, их вид может быть зафиксирован. Остается лишь проблема определения поведения периодических множителей на малых расстояниях.

Одним из методов решения квазипотенциальных уравнений является разработанный в работах [7, 8] подход, основанный на сведении этих уравнений в импульсном пространстве к дифференциальным. Однако отметим, что использованный в них метод применим лишь для квазипотенциалов, являющихся фурье-образами в смысле привычного разложения по плоским волнам $e^{i\mathbf{pr}}$ функций, четных в обычном r-пространстве. При этом для нахождения решений таких уравнений весьма эффективным является метод эталонного уравнения.

Естественно возникает вопрос, можно ли найти дифференциальный аналог интегрального квазипотенциального уравнения, если квазипотенциал определять как образ четной функции, заданной в релятивистском конфигурационном представлении. Поскольку в этом представлении релятивистская координата сопряжена не импульсу, а быстротам [5], то, по сути дела, речь идет о сведении к дифференциальному уравнению нового класса потенциалов, задаваемых в пространстве быстрот и являющихся локальными в импульсном пространстве Лобачевского.

В настоящей работе мы используем ряд квазипотенциалов, с которыми в киральном пределе (когда масса составного адрона равна нулю) уравнения могут быть решены точно.

2. ПЕРЕХОД К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

Рассмотрим квазипотенциальные уравнения

$$G_{0i=1,2}^{-1}(E_p,E_q)\,\Psi_q(\mathbf{p})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int V(\mathbf{p},\mathbf{k};E_q)\,\Psi_q(\mathbf{k})\,\frac{m\,d\mathbf{k}}{E_k}, \tag{2.1}$$

где обратные функции Грина $G_{0i}^{-1}(E_p, E_q)$ в случае уравнений Логунова — Тавхелидзе и Кадышевского имеют соответственно вид

$$G_{01}^{-1}(E_p, E_q)=E_q^2-E_p^2=E_q^2-m^2-\mathbf{p}^2; \tag{2.2}$$

$$G_{02}^{-1}(E_p, E_q)=E_p(E_q-E_p).$$

Уравнения (2.1) после парциального разложения волновых функций и квазипотенциала:

$$\Psi_q(\mathbf{p})=\frac{1}{4\pi p}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,\Phi_{ql}(p)\,Y_{lm}(\mathbf{n}_p), \tag{2.3}$$

$$V(\mathbf{p},\mathbf{k};E_q)=\frac{1}{4\pi pk}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,V_l(p,k;E_q)\,P_l(\mathbf{n}_p\mathbf{n}_k), \tag{2.4}$$

можно переписать в виде

(2.5) $$\mathcal{F}_{ql}(p)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int V_l(p,k;E_q)\,G_0(E_k,E_q)\,\mathcal{F}_{ql}(k)\frac{m\,dk}{\sqrt{m^2+k^2}},$$

где

(2.6) $$\mathcal{F}_{ql}(p)=G_0^{-1}(E_p,E_q)\,\Phi_{ql}(p).$$

В работах [8, 9] квазипотенциальное уравнение сводилось к дифференциальному с помощью следующего приема. Квазипотенциал в x-представлении, задаваемый фурье-преобразованием

(2.7) $$V(\mathbf{q}^2)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{x}\,e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}}V(x);\quad \mathbf{q}^2=|\mathbf{p}-\mathbf{k}|^2;\quad x=|\mathbf{x}|,$$

или с помощью парциального разложения формулой

(2.8) $$V_l(p,k)=\sqrt{pk}\int_0^\infty dx\,xJ_{l+1/2}(px)\,V(x)\,J_{l+1/2}(kx),$$

выбирался в виде четной функции [9] $V(x)=gx^{-2n}$. Затем с помощью формулы [8, 10]

(2.9) $$\sqrt{pk}\int_0^\infty dx\,x^{-2n+1}J_{l+1/2}(px)\,J_{l+1/2}(kx)=$$

$$=\frac{\Gamma(l+3/2-n)}{2^{2n-1}\Gamma(n)\,\Gamma(l+3/2)}\left\{\theta(p-k)\frac{k^{l+1}}{p^{l+2-2n}}F\left(l+3/2-n,\,-n+1;\,l+3/2;\,\frac{k^2}{p^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\theta(k-p)\,\frac{p^{l+1}}{k^{l+2-2n}}F\left(l+3/2-n,\,-n+1;\,l+3/2;\,\frac{p^2}{k^2}\right)\right\},$$

из которой, в частности, при $n=1$ для

(2.10) $$V_{l=0}(p,k)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty dx\,(-gx^{-2})\sin(px)\sin(kx)$$

следует представление

(2.11) $$V_0(p,k)=-g\{k\theta(p-k)+p\theta(k-p)\},$$

уравнение (2.5) при $V(x)=-gx^{-2}$ для $l=0$ сводится к дифференциальному

(2.12) $$\frac{d^2}{dp^2}\mathcal{F}_{q0}(p)=\frac{g^2}{\sqrt{m^2+p^2}}\,G_0(E_p,E_q)\,\mathcal{F}_{q0}(p)$$

с граничными условиями

$$\left[p\frac{d\mathcal{F}_{q0}(p)}{dp}-\mathcal{F}_{q0}(p)\right]_{p=0}=0;\qquad \frac{d}{dp}\mathcal{F}_{q0}(p)\,|_{p\to\infty}=0.$$

Для нас будет важным отметить, что при получении уравнения (2.12) авторы [8] определяют квазипотенциал $V(\mathbf{q}^2)$ через выбранный в координатном представлении квазипотенциал $V(x)$ с помощью обычного фурье-преобразования (2.7). Функции $e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}$, фигурирующие в (2.7), реализуют унитарные представления группы движений трехмерного евклидова пространства импульсов. Тем самым преобразования (2.7) и (2.8) генерируют потенциалы, являющиеся локальными функциями в трехмерном евклидовом импульсном пространстве, т. е. зависящие от разности двух векторов из этого пространства $V(\mathbf{q}^2)=V[(\mathbf{p}-\mathbf{k})^2]$. Например, квазипотенциалу

$$V(x)=-g^2/\mathbf{x}^2 \tag{2.13}$$

с помощью (2.7) ставится в соответствие квазипотенциал

$$V(\mathbf{q}^2)=-2\pi^2g^2\frac{1}{\sqrt{\mathbf{q}^2}}=-2\pi^2g^2\frac{1}{|\mathbf{p}-\mathbf{k}|}. \tag{2.14}$$

Наш подход будет существенно использовать тот факт, что квазипотенциальные уравнения допускают локальную формулировку в трехмерном импульсном пространстве, обладающем геометрией Лобачевского. Аналоги формул (2.7) и (2.8) будут получены с помощью релятивистского конфигурационного представления. Рассматривая для простоты изложения частицы с равными массами $m_1=m_2=m$, отметим, что в уравнениях (2.1) импульсы всех частиц принадлежат массовой поверхности

$$p_0{}^2-\mathbf{p}^2=m^2; \quad k_0{}^2-\mathbf{k}^2=m^2, \tag{2.15}$$

а волновая функция относительного движения $\Psi_q(\mathbf{p})$ и квазипотенциал $V(\mathbf{p},\,\mathbf{k};\,E_q)$ определены вне энергетической поверхности $(E_p\neq E_k)$.

Мы будем полагать, что квазипотенциал является локальной функцией в трехмерном импульсном пространстве Лобачевского, реализованном на верхней поле массового гиперболоида (2.15), т. е. зависит от вектора неевклидовой разности $\mathbf{p}(-)\mathbf{k}$ двух импульсов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$ в этом пространстве [5]

$$\Delta_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\equiv\mathbf{p}(-)\mathbf{k}=\Lambda_{\mathbf{k}}^{-1}\mathbf{p}=\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{m}\left(p_0-\frac{\mathbf{pk}}{k_0+m}\right), \tag{2.16а}$$

$$\overset{0}{\Delta}_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\equiv(\mathbf{p}(-)\mathbf{k})^0=(\Lambda_{\mathbf{k}}^{-1}\mathbf{p})^0=\sqrt{m^2+(\mathbf{p}(-)\mathbf{k})^2}=p^\mu k_\mu/m, \tag{2.16б}$$

где $\Lambda_{\mathbf{k}}^{-1}$ — матрица чистого преобразования Лоренца в систему покоя: $\Lambda_{\mathbf{k}}(m,\,\mathbf{0})=(k^0,\,\mathbf{k})$.

Заметим также, что элемент объема

$$d\Omega_{\mathbf{k}}=m d\mathbf{k}/\sqrt{m^2+\mathbf{k}^2}, \tag{2.17}$$

с которым происходит интегрирование в уравнениях (2.1), представляет собой элемент объема в импульсном пространстве Лобачевского, реализованном на поверхности массового гиперболоида (2.15). Таким образом, импульсное пространство, фигурирующее в уравнениях (2.1), можно рассматривать как пространство Лобачевского, а волновые функции и квазипотенциал — как заданные на этом пространстве объекты.

В случае локальных в пространстве Лобачевского квазипотенциалов в уравнениях (2.1) удобно перейти к релятивистскому конфигурационному представлению путем разложений [5]

$$\Psi_q(\mathbf{p})=\int\xi^*(\mathbf{p},\mathbf{r})\,\Psi_q(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}; \tag{2.18}$$

$$\Psi_q(\mathbf{r})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\xi(\mathbf{p},\mathbf{r})\Psi_q(\mathbf{p})\,d\Omega_{\mathbf{p}},$$

(2.19) $$V(\Delta)=\int\xi^*(\Delta,\mathbf{r})V(\mathbf{r})\,d\mathbf{r};\quad V(\mathbf{r})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\xi(\Delta,\mathbf{r})V(\Delta)\,d\Omega_\Delta,$$

где функции

(2.20) $$\xi(\mathbf{p},\mathbf{r})=(p^\mu n_\mu/m)^{-1-imr};\quad n_\mu=(1,\mathbf{n});\quad n^2=0,$$

реализуют унитарные представления $0\leqslant r<\infty$ группы Лоренца [11].

В случае центрально-симметричного потенциала $V(\mathbf{p},\mathbf{k})=V(\Delta^2_{\mathbf{p},\mathbf{k}})$ и при ограничении лишь состояниями с $l=0$ преобразования (2.18) и (2.19) можно переписать для функций $k\Psi(k)$ и $r\Psi(r)$ в виде синус-преобразований по быстротам χ_p и χ_k:

(2.21) $$k\Psi(k)=4\pi\int_0^\infty\sin(mr\chi_k)\,r\Psi(r)\,dr,$$

(2.22) $$r\Psi(r)=\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\sin(mr\chi_p)\,p\Psi(p)\,d\chi_p,$$

(2.23) $$|\Delta_{\mathbf{p},\mathbf{k}}|\,V(\Delta^2_{\mathbf{p},\mathbf{k}})=4\pi\int_0^\infty\sin(mr\chi_\Delta)\,rV(r)\,dr,$$

где

(2.24) $$\chi_k=\operatorname{Arsh}\frac{|\mathbf{k}|}{m};\quad \chi_\Delta=\operatorname{Arch}\left(1+\frac{Q^2}{2m^2}\right)$$

суть быстроты, сопряженные соответственно импульсу частицы

(2.25) $$\mathbf{k}=\mathbf{n}_k m\operatorname{sh}\chi_k;\quad k_0=m\operatorname{ch}\chi_k$$

и квадрату переданного импульса

(2.26) $$q^2=-Q^2=(p-k)^\mu(p-k)_\mu=2m^2-2p^\mu k_\mu=2m^2-2m\overset{0}{\Delta}_{\mathbf{p},\mathbf{k}}=2m^2-2m^2\operatorname{ch}\chi_\Delta.$$

В силу теоремы сложения импульсов из пространства Лобачевского [12]

(2.27) $$m^{-1}\overset{0}{\Delta}_{\mathbf{p},\mathbf{k}}=m^{-2}p^\mu k_\mu=\operatorname{ch}\chi_\Delta=\operatorname{ch}\chi_p\operatorname{ch}\chi_k-\operatorname{sh}\chi_p\operatorname{sh}\chi_k\,\mathbf{n}_p\mathbf{n}_k$$

и теоремы сложения для релятивистских плоских волн [11] формулу (2.19) можно также представить в виде, аналогичном (2.10) [5]:

(2.28) $$V(\chi_p,\chi_k)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty dr\,V(r)\sin(mr\chi_p)\sin(mr\chi_k).$$

Если теперь в уравнениях (2.1) провести интегрирование по углам вектора $\mathbf{k}$, то для центрально-симметричного случая с использованием формул (2.25), (2.26) и (2.27) их можно будет представить как

$$(2.29)\qquad (E_q^2-m^2\operatorname{ch}^2\chi_p)\,p\Psi(p)=\int_0^\infty V(\chi_p,\chi_k)\,k\Psi(k)\,m\,d\chi_k,$$

$$(2.30)\qquad m\operatorname{ch}\chi_p(E_q-m\operatorname{ch}\chi_p)\,p\Psi(p)=\int_0^\infty V(\chi_p,\chi_k)\,k\Psi(k)\,m\,d\chi_k.$$

При выводе уравнений (2.29) и (2.30) мы воспользовались тем фактом, что элемент объема импульсного пространства Лобачевского (2.17) в параметризации через быстроты (2.24) может быть записан следующим образом:

$$(2.31)\qquad m d\mathbf{k}/\sqrt{m^2+\mathbf{k}^2}=m^2\operatorname{sh}^2\chi_k d\chi_k d\omega_{\mathbf{k}}.$$

Обратимся теперь к формуле (2.23) и заметим, что квазипотенциалам

$$(2.32)\qquad V_0(r)=-\frac{g^2}{r^2},\qquad V_\pm(r)=-\frac{g^2}{r^2\pm a^2},$$

заданным в релятивистском конфигурационном представлении, после преобразования (2.19) в импульсном пространстве будут отвечать квазипотенциалы вида

$$(2.33)\qquad V_0(\Delta^2_{\mathbf{p},\mathbf{k}})=-2\pi^2g^2/|\mathbf{p}(-)\mathbf{k}|,$$

$$(2.34)\qquad V_+(\Delta^2_{\mathbf{p},\mathbf{k}})=-(2\pi^2g^2/|\mathbf{p}(-)\mathbf{k}|)\exp(-am\chi_\Delta),$$

$$(2.35)\qquad V_-(\Delta^2_{\mathbf{p},\mathbf{k}})=-(2\pi^2g^2/|\mathbf{p}(-)\mathbf{k}|)\cos(am\chi_\Delta).$$

Соответственно для потенциалов, заданных в пространстве быстрот, находим

$$(2.36)\qquad V_0(\chi_p,\chi_k)=-g^2m\{\chi_k\theta(\chi_p-\chi_k)+\theta(\chi_k-\chi_p)\chi_p\},$$

$$(2.37)\qquad V_+(\chi_p,\chi_k)=-\frac{g^2}{a}\{\theta(\chi_p-\chi_k)\exp(-am\chi_p)\operatorname{sh}(am\chi_k)+$$
$$+\theta(\chi_k-\chi_p)\exp(-am\chi_k)\operatorname{sh}(am\chi_p)\},$$

$$(2.38)\qquad V_-(\chi_p,\chi_k)=-\frac{g^2}{a}\{\theta(\chi_p-\chi_k)\sin(am\chi_k)\cos(am\chi_p)+$$
$$+\theta(\chi_k-\chi_p)\sin(am\chi_p)\cos(am\chi_k)\}.$$

Сравнение между собою формул (2.13), (2.14) и (2.32), (2.33), а также (2.10), (2.11) и (2.28), (2.36) наглядно демонстрирует, в чем сходство и различие между подходом авторов [8, 9], использующих евклидово импульсное пространство, и нашим, использующим пространство Лобачевского. Действительно, переход от (2.14) к (2.23) состоит в замене разности $\mathbf{p}-\mathbf{k}$ на разность в пространстве Лобачевского $\mathbf{p}(-)\mathbf{k}$ (2.16а). Для парциальных потенциалов (2.4) это означает при $l=0$ формальную замену в преобразованиях (2.10) и (2.11) модулей импульсов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$ на соответствующие им в смысле параметризации (2.25) быстроты χ_p и χ_k. В нерелятивистском пределе, когда $\xi(\mathbf{p},\mathbf{r})\to e^{i\mathbf{pr}}$, а (2.28) и (2.9) переходят в (2.10) и (2.7), $m\chi_p\sim p$. Подставим теперь потенциалы (2.36), (2.38) в уравнения

(2.29) и (2.30) и продифференцируем их дважды. В результате для функции $\Phi(\chi_p)=p\Psi(p)$ вместо (2.36)—(2.38) получаем соответственно

$$\frac{d^2}{d\chi_p^2} G_{0i}^{-1}(E_p, E_q)\,\Phi_0(\chi_p)=m^2g^2\Phi_0(\chi_p), \tag{2.39}$$

$$\left[-\frac{d^2}{d\chi_p^2}+(am)^2\right] G_{0i}^{-1}(E_p, E_q)\,\Phi_+(\chi_p)=-g^2m^2\Phi_+(\chi_p), \tag{2.40}$$

$$\left[-\frac{d^2}{d\chi_p^2}-(am)^2\right] G_{0i}^{-1}(E_p, E_q)\,\Phi_-(\chi_p)=-g^2m^2\Phi_-(\chi_p), \tag{2.41}$$

где $G_{0i}^{-1}(E_p,\ E_q)$ — обратные свободные функции Грина уравнений (2.1).

Легко видеть, что если мы теперь введем согласно (2.6) новую функцию $\mathscr{F}(\chi_p)=\mathscr{F}_{ql=0}(\chi_p)$, то для функций $\mathscr{F}_0(\chi_p)$ и $\mathscr{F}_\pm(\chi_p)$ из (2.39) следует, что эти функции подчиняются дифференциальному уравнению типа одномерного уравнения Шредингера

$$\left[-\frac{1}{m^2}\frac{d^2}{d\chi_p^2}\pm a^2\right]\mathscr{F}(\chi_p)=-g^2G_{0i}(E_p, E_q)\,\mathscr{F}(\chi_p), \tag{2.42}$$

в котором роль координаты играет быстрота χ_p, а роль потенциала выполняет свободная функция Грина $G_{0i}(E_p,\ E_q)$, и которое имеет граничные условия

$$\left[p\frac{d\mathscr{F}(\chi_p)}{d\chi_p}-\mathscr{F}(\chi_p)\right]_{\chi_p=0}=0;\qquad \chi_p\frac{d\mathscr{F}(\chi_p)}{d\chi_p}\bigg|_{\chi_p\to\infty}=0.$$

Сравним теперь между собою уравнение (2.12), возникающее при использовании евклидовых квазипотенциалов, и полученное нами уравнение (2.42). Их различие при $a=0$ состоит, во-первых, в замене дифференцирования по импульсу дифференцированием по быстроте, а во-вторых, что более существенно, в отсутствии в правой части уравнения иррационального корня $(m^2+\mathbf{p}^2)^{-1/2}$, который авторам работы [8] при изучении уравнения (2.12) приходилось заменять приближенными рациональными выражениями. Формально «исчезновение» этого корня происходит уже при переходе к параметризации элемента объема (2.17) с помощью быстроты χ_k (см. (2.31)), что существенно облегчает исследование квазипотенциального уравнения и нахождение его решений. Однако переход от импульса k к новой переменной, быстроте χ_k составляет лишь внешнюю часть нашего формализма, т. к. суть нашего подхода состоит в использовании другого класса квазипотенциалов — локальных в пространстве Лобачевского, что обеспечивает локальность дифференциального уравнения.

3. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С КВАЗИПОТЕНЦИАЛОМ r^{-2} В КИРАЛЬНОМ ПРЕДЕЛЕ И РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КУЛОНОВА ПРОБЛЕМА

В киральном пределе, когда масса связанного состояния $M=2E_q$ стремится к нулю, свободные функции Грина уравнений (2.1) совпадают. Уравнение (2.42) при $E_q=0$, $a=0$ примет вид ($\chi_p=\chi$)

$$\frac{d^2}{d\chi^2}\mathscr{F}(\chi)+\frac{g^2}{\operatorname{ch}^2\chi}\mathscr{F}(\chi)=0, \tag{3.1}$$

а его решениями, как легко проверить, являются функции Лежандра [10]

$$\mathscr{F}(\chi)=P_\nu(\operatorname{th}\chi)={}_2F_1(-\nu,\ \nu+1;\ 1;\ (1-\operatorname{th}\chi)/2), \tag{3.2}$$

где параметр ν связан с константой взаимодействия $g^2>0$ соотношением

$$g^2=\nu(\nu+1). \tag{3.3}$$

Из граничного условия для функции $\Phi(p)|_{p=0}=0$ следует аналогичное условие и для $\mathscr{F}(\chi)$. Поскольку

$$P_\nu(\operatorname{th}\chi)|_{\chi=0}\cong\cos\left(\frac{\pi}{2}\nu\right)\frac{\Gamma(^1/_2+\nu/2)}{\Gamma(1+\nu/2)}, \tag{3.4}$$

то из требования $\mathscr{F}(0)=0$ следует соотношение $\nu=2n+1$, $n=0, 1, 2, 3, \ldots$, которое приводит к условию квантования константы связи

$$g^2=(2n+1)(2n+2);\quad n=0, 1, 2, \ldots. \tag{3.5}$$

Следовательно, решением уравнения (3.1) при $E_q=0$ являются полиномы Лежандра с целым нечетным индексом

$$\Phi^{(n)}(\chi_p)=\frac{1}{\operatorname{ch}^2\chi_p}P_{2n+1}(\operatorname{th}\chi_p). \tag{3.6}$$

Первая волновая функция, отвечающая $n=0$ или согласно правилу квантования $g^2=2$, имеет вид

$$\Phi^{(1)}(\chi)=\operatorname{th}\chi/\operatorname{ch}^2\chi=\operatorname{sh}\chi/\operatorname{ch}^3\chi. \tag{3.7}$$

Легко проверить, что в релятивистском конфигурационном представлении ей отвечает функция (см. (2.21))

$$r\Psi^{(1)}(r)\cong\frac{(mr)^2}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2}mr\right)}, \tag{3.8}$$

которая удовлетворяет разностному уравнению в релятивистском конфигурационном представлении

$$m^2\operatorname{ch}^2\left(\frac{i}{m}\frac{d}{dr}\right)r\Psi^{(1)}(r)=\frac{g^2}{r^2}r\Psi(r) \tag{3.9}$$

при $g^2=2$.

Сделаем теперь одно замечание о связи найденного решения с релятивистской кулоновой проблемой. Как было показано в [5, 6], пропагатору обмена скалярным фотоном (см. параметризацию (2.26))

$$V_{\text{КЭД}}(\Delta^2_{\mathbf{p},\mathbf{k}})=\frac{4\pi\alpha m}{(p-k)^\mu(p-k)_\mu}=\frac{4\pi\alpha}{2m-2\sqrt{m^2+(\mathbf{p}(-)\mathbf{k})^2}}, \tag{3.10}$$

отвечает после преобразования с помощью (2.19) следующий потенциал в релятивистском конфигурационном представлении:

$$V_{\text{КЭД}}(r)=-\frac{m\alpha}{r}\operatorname{cth}(\pi rm). \tag{3.11}$$

Отметим, что в отличие от обычного кулонова потенциала, который получается после пренебрежения в (3.10) запаздывающей частью: $(p-k)^{\mu}\times \times(p-k)_{\mu}=(p_0-k_0)^2-(\mathbf{p}-\mathbf{k})^2\to-(\mathbf{p}-\mathbf{k})^2$, релятивистский потенциал при малых r обладает более сильной сингулярностью:

$$V_{\text{кэд}}(r)\,|_{r\to 0}\to-\frac{g^2}{r^2}=V_0(r);\quad g^2=\frac{\alpha}{\pi}. \tag{3.12}$$

При больших r $(r\gg 1/m)$, где $\operatorname{cth}(\pi rm)\cong 1$, $V_{\text{кэд}}(r)$ переходит в кулонов:

$$V_{\text{кэд}}(r)\,|_{r\to\infty}\simeq-\frac{m\alpha}{r}. \tag{3.13}$$

Уравнение (2.1) с функцией Грина (2.2а) и квазипотенциалом (3.10) в релятивистском конфигурационном представлении для $l=0$ принимает вид

$$\left[m^2\operatorname{ch}^2\left(\frac{i}{m}\frac{d}{dr}\right)-2E_q\right]r\Psi(r)=\frac{\alpha m}{r}\operatorname{cth}(\pi rm)\,r\Psi(r). \tag{3.14}$$

Решения уравнения (3.14) были получены при произвольном значении α в работе [6] в виде гипергеометрической функции с точностью до i-периодического множителя $C(r)$. Сравнивая между собою уравнения (3.9) и (3.14), мы можем заключить, что волновые функции (3.8) можно рассматривать как решение уравнения (3.14) при $g^2=\alpha/\pi=2$ в области малых r, где пренебрежение слагаемым $2E_q$ по сравнению с $V_{\text{кэд}}(r)$ законно. Таким образом, можно надеяться определить при $g^2=2$ вид i-периодического множителя $C(r)$, с точностью до которого находится решение уравнения (3.14).

Интересно отметить также, что поскольку в преобразованиях (2.19), (2.23) малым r $(r\to 0)$ согласно (2.26), (3.10) отвечает $\chi_\Delta\to\infty$, т. е. $\operatorname{sh}\chi_\Delta\to\infty$, то потенциал

$$V_{\text{кэд}}(\Delta^2_{\mathbf{p},\mathbf{k}})=\frac{4\pi\alpha m}{2m^2-2m\sqrt{m^2+\Delta^2_{\mathbf{p},\mathbf{k}}}}\Bigg|_{|\Delta_{\mathbf{p},\mathbf{k}}|\to\infty}\to-\frac{4\pi\alpha}{2|(\mathbf{p}(-)\mathbf{k}|} \tag{3.15}$$

и потенциал $V_0(\Delta^2_{\mathbf{p},\mathbf{k}})$, определяемый (2.33), совпадают и в импульсном представлении, т. к. $\alpha=\pi g^2$.

4. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С КВАЗИПОТЕНЦИАЛАМИ ВИДА $(r^2\pm a^2)^{-1}$ В КИРАЛЬНОМ ПРЕДЕЛЕ

Уравнение (2.40) для функции $\mathscr{F}_+(\chi)$ (2.42) при $E_q=0$ имеет вид

$$\left[\frac{d^2}{d\chi^2}-(am)^2+\frac{g^2}{\operatorname{ch}^2\chi}\right]\mathscr{F}_+(\chi)=0. \tag{4.1}$$

Заменой $\xi=\operatorname{th}\chi$ оно сводится к уравнению Лежандра

$$\left[(1-\xi^2)\frac{d^2}{d\xi^2}-2\xi\frac{d}{d\xi}+g^2-\frac{(am)^2}{1-\xi^2}\right]\mathscr{F}_+(\xi)=0, \tag{4.2}$$

решением которого являются функции Лежандра [10] на разрезе (т. к. у нас $0\leqslant\xi<1$) $P_\nu^\mu(\xi)$ с нижним индексом ν, связанным с константой g^2 прежним соотношением (3.3).

Решениями (4.2), конечными при $\chi_p \to \infty$, т. е. $\xi \to 1$, будут функции а) при нецелом значении am

$$(4.3) \qquad \mathcal{F}_+(\chi_p) = P_\nu^{-am}(\operatorname{th}\chi_p), \quad am \neq 1, 2, 3, \ldots,$$

б) при целом значении am

$$(4.4) \qquad \mathcal{F}_+(\chi_p) = P_\nu^{am}(\operatorname{th}\chi_p), \quad am = 1, 2, 3, \ldots .$$

В случае «а» граничное условие $\mathcal{F}_+(0)=0$, так же как и в (3.4), приводит к соотношению

$$(4.5) \qquad \nu = am + 2n + 1, \quad am \neq 1, 2, 3, \ldots$$

откуда с учетом связи ν и g^2 (3.3) находим, что условие квантования константы связи теперь содержит зависимость от am:

$$(4.6) \qquad g^2 = (am+2n+1)(am+2n+2), \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

С учетом соотношения [10]

$$(4.7) \qquad P_\nu^\mu(\xi) = \frac{1}{2}\left[e^{i\mu\pi/2} P_\nu^\mu(\xi+i0) + e^{-i\mu\pi/2} P_\nu^\mu(\xi-i0)\right]$$

для решения при нецелых значениях am находим

$$(4.8) \qquad \Phi_+(\chi_p) = \exp(-am\chi_p)\operatorname{ch}^{-2}\chi_p (e^{-\chi_p} 2 \operatorname{ch}\chi_p)^{am-2n-1} \times$$
$$\times {}_2F_1(-2n-1-am, -2n-1; 1+am; -e^{-2\chi_p}).$$

В случае «б» граничное условие приводит к соотношению

$$(4.9) \qquad \nu = 2n+1-am, \quad am = 1, 2, 3, \ldots .$$

Следовательно, решениями вновь будут полиномы Лежандра

$$(4.10) \qquad \Phi_+(\chi_p) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2\chi_p} P_{2n+1-am}^{am}(\operatorname{th}\chi_p), \quad am = 1, 2, 3, \ldots,$$

где $n \geqslant am$ играет роль квантового числа, входящего в условие квантования константы связи

$$(4.11) \qquad g^2 = (2n+1-am)(2n+2-am).$$

Очевидно, что при $am=0$ формулы (4.10) и (4.11) переходят в выражения (3.6) и (3.5).

Рассмотрим теперь уравнение (2.4). При $E_q=0$ уравнение для функции (2.6) принимает вид

$$(4.12) \qquad \left[\frac{d^2}{d\chi^2} + (am)^2 + \frac{g^2}{\operatorname{ch}^2\chi}\right]\mathcal{F}_-(\chi) = 0.$$

Аналогично (4.2) оно сводится к уравнению Лежандра

$$(4.13) \qquad \left[(1-\xi^2)\frac{d^2}{d\xi^2} - 2\xi\frac{d}{d\xi} + g^2 + \frac{(am)^2}{1-\xi^2}\right]\mathcal{F}_-(\xi) = 0,$$

так что его решениями будут функции Лежандра на разрезе $P_\nu^\mu(\xi)$, отличающиеся, как это следует из сравнения уравнений (4.2) и (4.13), при вещественном значении величины am от функции (4.3) лишь заменой верхнего индекса am на мнимый $\pm iam$, т. е. функции

$$(4.14)\qquad P_\nu^{\pm iam}(\operatorname{th}\chi)=\frac{1}{\Gamma(1\mp iam)}\left(\frac{1-\operatorname{th}\chi}{1+\operatorname{th}\chi}\right)^{\pm iam/2}\times$$

$$\times\,{}_2F_1(-\nu;\,\nu\pm1;\,1\mp iam;\,(1-\operatorname{th}\chi)/2).$$

В силу известного [10] поведения функций $P_\nu^{\pm iam}$ $(\operatorname{th}\chi)$ при $\chi=0$:

$$(4.15)\qquad P_\nu^{\pm iam}(\operatorname{th}\chi)\,|_{\chi=0}=\cos\left[\frac{\pi}{2}(\nu\pm iam)\right]\frac{2^{-\nu}\Gamma(1+\nu\pm iam)}{|\Gamma(1+\nu/2-iam)|^2},$$

решениями, удовлетворяющими граничному условию $\mathscr{F}_-(0)=0$, будут лишь следующие вещественные комбинации:

$$(4.16)\qquad \mathscr{F}_-(\operatorname{th}\chi)=K^{(\pm)}(\xi)=\Gamma(1+\nu-iam)P_\nu^{iam}(\operatorname{th}\chi)\pm$$

$$\pm\,\Gamma(1+\nu+iam)P_\nu^{-iam}(\operatorname{th}\chi),$$

причем $K^{(+)}(0)=0$ при $\nu=2n+1$, а $K^{(-)}(0)=0$ при $\nu=2n$. Следовательно, решения отвечают соответственно следующим условиям квантования константы связи:

$$(4.17)\qquad g^2=(2n+1)(2n+2),\qquad n=0,1,2,\ldots,$$

$$(4.18)\qquad g^2=2n(2n+1),\qquad n=0,1,2,\ldots,$$

отличающимся между собой лишь сдвигом по n на единицу.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, подводя итог, надо отметить, что, во-первых, в настоящей работе для нового класса квазипотенциалов, задаваемых в релятивистском конфигурационном представлении в виде четных функций от релятивистской относительной координаты r, одномерные интегральные уравнения Логунова — Тавхелидзе и Кадышевского сведены к дифференциальным уравнениям в импульсном пространстве. Во-вторых, в пределе сильной связи, когда масса связанного состояния стремится к нулю, найдены точные решения квазипотенциального уравнения в виде волновых функций в импульсном пространстве. При этом для частного случая константы взаимодействия установлена связь полученных в импульсном пространстве решений для потенциала вида r^{-2} с найденными ранее решениями релятивистской кулоновой проблемы двух тел.

Дальнейшее распространение развитого здесь формализма на случай состояний с отличным от нуля орбитальным моментом, а также решение уравнений (2.39) — (2.41) в случае ненулевых масс связанного состояния, в частности для релятивистской кулоновой задачи, будут рассмотрены в последующих работах.

Авторы выражают свою глубокую благодарность В. Ш. Гогохия, А. Д. Линкевичу, В. И. Саврину, В. В. Санадзе и А. Т. Филиппову за полезные обсуждения работы.

Литература

[1] *Logunov A. A., Tavkhelidze A. N.*— Nuovo Cim., 1963, *29*, № 2, 380–400.
[2] *Kadyshevsky V. G.*— Nucl. Phys., 1968, *B6*, № 1, 125–137.
[3] *Хрусталев О. А.* Квазипотенциальное уравнение в x-пространстве. Препринт № 69-24, Серпухов: ИФВЭ, 1969.
[4] *Архипов А. А., Саврин В. И.* Об одном методе решения квазипотенциального уравнения. Препринт № 82-21, Серпухов: ИФВЭ, 1982.
[5] *Kadyshevsky V. G., Mir-Kasimov R. M., Skachkov N. B.*— Nuovo Cim., 1968, *55A*, № 2, 233–257. *Кадышевский В. Г., Мир-Касимов Р. М., Скачков Н. Б.*— ЭЧАЯ, 1972, *2*, № 3, 635–690.
[6] *Кадышевский В. Г., Мир-Касимов Р. М., Фриман М.*— ЯФ, 1969, *9*, № 3, 646–652.
[7] *Arbuzov B. A.*— Phys. Lett., 1964, *13*, № 1, 951–955. *Filippov A. T.*— Nuovo Cim., 1966, *38*, № 5, 596–604.
[8] *Гогохия В. Ш., Филиппов А. Т.*— ТМФ, 1974, *21*, № 1, 37–48. *Гогохия В. Ш., Мавло Д. П., Филиппов А. Т.*— ТМФ, 1976, *27*, 323–332.
[9] *Filippov A. T., Puzynin I. V., Mavlo D. P.*— J. Comput. Phys., 1976, *22*, № 2, 150–170.
[10] *Бейтман Г., Эрдеи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 1, 2. М.: Наука, 1974.
[11] *Шапиро И. С.*— ДАН СССР, 1956, *106*, № 4, 647–649.
[12] *Черников Н. А.*— ЭЧАЯ, 1973, № 3, 733–750. *Смородинский Я. А.*— Атомная энергия, 1963, *14*, № 1, 110–121.

Объединенный институт
ядерных исследований

Поступила в редакцию
22.VII.1982 г.

ON A CLASS OF EXACT SOLUTIONS TO QUASIPOTENTIAL EQUATIONS

Kapshay V. N., Kuleshov S. P., Skachkov N. B.

It is shown that the quasipotential equations [1, 2] can be reduced to differential second order equations in the rapidity space if the quasipotentials are chosen in the form of local functions in the momentum Lobachevsky space. Their transforms in the relativistic configurational representation are even functions of r. Exact wave functions are obtained for the quasipotentials of the form $V(r)\sim r^{-2}$, $(r^2\pm a^2)^{-1}$ in the chiral limit when the bound state mass is equal to zero.