Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Е. А. Дей, В. Н. Капшай, Н. Б. Скачков, Точные решения класса квазипотенциальных уравнений для суперпозиции квазипотенциалов однобозонного обмена, *ТМФ*, 1990, том 82, номер 2, 188–198

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 37.17.74.99
21 октября 2024 г., 17:14:11

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 82, № 2
февраль, 1990

© 1990 г.

Е. А. Дей [1], В. Н. Капшай [1], Н. Б. Скачков

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ КЛАССА КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СУПЕРПОЗИЦИИ КВАЗИПОТЕНЦИАЛОВ ОДНОБОЗОННОГО ОБМЕНА

Рассмотрен широкий класс квазипотенциальных уравнений, описывающих двухчастичные связанные системы, в случае взаимодействия, взятого в виде суперпозиции квазипотенциалов однобозонного обмена. С помощью преобразования Лапласа уравнения приведены к форме дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Решения последних найдены в классе обобщенных функций. Получены условия квантования и волновые функции в релятивистском конфигурационном и импульсном представлениях.

I. ВВЕДЕНИЕ

Квазипотенциальный подход в квантовой теории поля [1—3] нашел широкое применение для описания свойств атомов, адронов и ядер как связанных состояний. Знание релятивистских волновых функций связанного состояния позволяет рассчитывать спектры масс атомов и составных систем типа позитрония и кваркония [4, 5], формфакторы упругого рассеяния и распадов мезонов, структурные функции адронов и т. д.

В импульсном представлении интегральные уравнения квазипотенциального подхода являются трехмерными, что позволяет развить эффективные методы их решения [6—11]. Другой привлекательной чертой подхода является возможность формулировки уравнений в релятивистском конфигурационном представлении (РКП), где они имеют вид разностных [6, 12]. Отметим, что первоначально точные решения квазипотенциальных уравнений были найдены именно в РКП [6].

В работе [11] был предложен метод решения разностных уравнений общего вида в случае квазипотенциала, обладающего в импульсном пространстве «асимптотически свободным» поведением при больших переданных импульсах, а в РКП имеющего вид αr^{-1}. Метод основан на сведении с помощью преобразования Лапласа разностных уравнений к дифференциальным и на последующем их решении в классе обобщенных функций медленного роста. В настоящей работе аналог метода [11] развит для случая суперпозиций квазипотенциалов однобозонного обмена (в том числе с ненулевой массой бозона).

План нашей работы таков. Во втором разделе мы формулируем квазипотенциальные уравнения и приводим явный вид квазипотенциалов однобозонного обмена и их суперпозиций. В третьем разделе класс разностных

[1] Гомельский государственный университет.

квазипотенциальных уравнений сведен к дифференциальным уравнениям с отклоняющимся аргументом и изложен метод их решения. В четвертом разделе получены волновые функции в импульсном и релятивистском конфигурационном представлениях. В заключении указаны другие квазипотенциалы, для которых может быть применен предложенный метод.

2. КВАЗИПОТЕНЦИАЛЫ ОДНОБОЗОННОГО ОБМЕНА И ИХ СУПЕРПОЗИЦИИ

Для связанной системы двух скалярных частиц одинаковой массы m квазипотенциальные уравнения Логунова — Тавхелидзе [1] и Кадышевского [3] записываются соответственно в виде

$$(p_0^2-E^2)\Psi(\mathbf{p})=(2\pi)^{-3}\int V(\mathbf{p},\mathbf{k};E)\Psi(\mathbf{k})m^2\,d\mathbf{k}/k_0, \tag{2.1}$$

$$p_0(p_0-E)\Psi(\mathbf{p})=(2\pi)^{-3}\int V(\mathbf{p},\mathbf{k};E)\Psi(\mathbf{k})m^2\,d\mathbf{k}/k_0. \tag{2.2}$$

Здесь $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$ — импульсы частиц в системе центра инерции. При этом 4-импульсы p^μ, k^μ принадлежат поверхности массового гиперболоида $p_0^2-\mathbf{p}^2=$ $=m^2$ (т. е. $p_0=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$, $k_0=\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}$); $2E=M$ — масса связанной системы, $d\mathbf{k}/k_0$ — лоренц-инвариантная мера интегрирования в импульсном пространстве Лобачевского, реализованном на массовой поверхности. Квазипотенциал V зависит, вообще говоря, от полной энергии системы $2E$ и задается вне энергетической поверхности $2p_0=2k_0=2E$.

Для построения квазипотенциала в теории поля применяют два метода. Метод, основанный на формализме двухвременных функций Грина, был предложен в [1] и использован для нахождения явного вида $V(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E)$ в скалярной теории в работе [13]. Другой метод основан на использовании квазипотенциального уравнения для амплитуды рассеяния, которая считается при этом заданной, например, диаграммами гамильтоновой формулировки квантовой теории поля [3, 14] (для уравнения (2.2)) или фейнмановскими диаграммами (для уравнения (2.1)). В этом последнем случае квазипотенциал обмена бозоном массы μ не зависит от M и имеет вид

$$V_{(\mu)}(\mathbf{p},\mathbf{k})=\frac{g^2}{\mu^2+Q^2};\qquad Q^2=-(p-k)^2=2m\overset{0}{\Delta}_{p,k}-2m^2. \tag{2.3}$$

Здесь, следуя [15], введен «4-вектор передачи импульса $\Delta_{p,k}$», компоненты которого определяются с помощью операции чистого преобразования Лоренца $\Lambda_k(\Lambda_k^{-1}k=(m,\mathbf{0}))$ следующим образом [16]:

$$\Delta_{p,k}^0=(\Lambda_k^{-1}p)^0=(p_0k_0-\mathbf{pk})/m=\sqrt{m^2+\boldsymbol{\Delta}_{p,k}^2}, \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{\Delta}_{p,k}=\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{m}\left(p_0-\frac{\mathbf{pk}}{k_0+m}\right)=\mathbf{p}(-)\mathbf{k}. \tag{2.5}$$

Квазипотенциал (2.3) является локальным в импульсном пространстве Лобачевского: $V(\mathbf{p}, \mathbf{k})=V(\mathbf{p}(-)\mathbf{k})$. Для потенциалов такого рода уравнения (2.1) и (2.2) с помощью интегрального преобразования [6, 12]

$$\Psi(\mathbf{p})=\int\xi(\mathbf{p},\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r})\,d\mathbf{r},\qquad V(\boldsymbol{\Delta})=\int\xi(\boldsymbol{\Delta},\mathbf{r})V(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} \tag{2.6}$$

с функциями [17]

$$(2.7)\qquad \xi(\mathbf{p},\mathbf{r})=[(p_0-\mathbf{pn})/m]^{-1-imr},$$

образующими полную ортогональную систему на массовом гиперболоиде $p_0^2-\mathbf{p}^2=m^2$, могут быть записаны в РКП в виде дифференциально-разностных уравнений

$$(2.8)\qquad (\hat{H}_0^2-E^2)\Psi(\mathbf{r})=mV(r)\Psi(\mathbf{r}),\quad \hat{H}_0(\hat{H}_0-E)\Psi(\mathbf{r})=mV(r)\Psi(\mathbf{r}).$$

В (2.8) $\hat{H}_0$ — свободный релятивистский гамильтониан [6]

$$\hat{H}_0=m\,\mathrm{ch}(iD)+\frac{i}{r}\mathrm{sh}(iD)-\frac{\Delta_{\theta,\varphi}}{r^2}\exp(iD),\qquad D=\frac{1}{m}\frac{d}{dr}.$$

При этом квазипотенциалу (2.3) отвечает в РКП выражение ($\alpha=g^2/4\pi$) [6, 12]

$$(2.9)\qquad V_{(\mu)}(r)=\frac{\alpha}{r}\frac{\mathrm{ch}(rma)}{\mathrm{sh}(rm\pi)},\qquad a=\arccos\frac{\mu^2-2m^2}{2m^2}.$$

В настоящей работе мы в основном сосредоточим свое внимание на квазипотенциалах, являющихся следующими суперпозициями выражений (2.3) в импульсном и соответственно (2.9) при $a=\pi$ и $a=0$ в РКП:

$$(2.10)\qquad V^{\pm}(\mathbf{p},\mathbf{k})=V_{(0)}(\mathbf{p},\mathbf{k})\pm V_{(2m)}(\mathbf{p},\mathbf{k})=\frac{g^2}{Q^2}\pm\frac{g^2}{4m^2+Q^2};$$

$$(2.11)\qquad V^{\pm}(r)=\alpha r^{-1}\,\mathrm{cth}(\pi rm)\pm\alpha r^{-1}\,\mathrm{sh}^{-1}(\pi rm),$$

$$V^{+}(r)=\alpha r^{-1}\,\mathrm{cth}(\pi rm/2),\qquad V^{-}(r)=\alpha r^{-1}\,\mathrm{th}(\pi rm/2).$$

В случае связанной системы спинорных частиц эффективное выражение для квазипотенциала однобозонного обмена (построенного на основе амплитуды рассеяния) после учета спиновых структур приводится к виду $V(\mathbf{p},\mathbf{k})=V(\Delta^0_{p,k})R(p_0,k_0)$, где $R(p_0,k_0)$ — рациональная функция (см., например, [18]). В связи с этим ниже мы будем рассматривать целый класс уравнений, которые являются обобщениями (2.1) и (2.2) и записываются в импульсном пространстве в следующей форме:

$$(2.12)\qquad P_\alpha(p_0)[p_0^2-E^2]\Psi(\mathbf{p})=$$

$$=(2\pi)^{-3}\int P_\beta(p_0)V(\Delta^0_{p,k})P_\gamma(k_0)\Psi(\mathbf{k})m^2\,d\mathbf{k}/k_0,$$

и аналогично для (2.2), где

$$(2.13)\qquad P_\alpha(p_0)=\sum_{\nu=0}^{N_\alpha}\alpha_\nu\left(\frac{p_0}{m}\right)^\nu,\qquad P_\beta(p_0)=\sum_{\nu=0}^{N_\beta}\beta_\nu\left(\frac{p_0}{m}\right)^\nu,$$

$$P_\gamma(p_0)=\sum_{\nu=0}^{N_\gamma}\gamma_\nu\left(\frac{p_0}{m}\right)^\nu.$$

Полиномы $P_{\alpha,\beta,\gamma}$ удовлетворяют только условиям $P_{\alpha,\beta,\gamma}(1)=1$, обеспечивающим правильный нерелятивистский предел уравнения (2.12).

3. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОБЩЕГО ВИДА В РЕЛЯТИВИСТСКОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Уравнение (2.19) в РКП в случае сферически-симметричных волновых функций ($l=0$) приводится к следующему виду ($\Phi(r)=r\Psi(r)$):

$$\hat{P}_\alpha\cdot[\operatorname{ch}^2(iD)-\cos^2 x]\,\Phi(r)=\hat{P}_\beta m^{-1}V(r)\,\hat{P}_\gamma\Phi(r). \tag{3.1}$$

Здесь

$$\cos x=M/2m,\qquad \hat{P}_\alpha=\sum_{\nu=0}^{N\alpha}\alpha_\nu\operatorname{ch}^\nu(iD), \tag{3.2}$$

и аналогично для $\hat{P}_{\beta,\,\gamma}$.

Для решения уравнения (3.1) мы применим преобразование Лапласа с фиксированным контуром

$$\Phi(r)=\int_0^\infty \exp(-mry)\,\varphi(y)\,dy. \tag{3.3}$$

Тогда из (3.1) получаем уравнение

$$\begin{aligned}P_\alpha(\cos y)\,[\cos^2 y-\cos^2 x]\,\varphi(y)&=\\ =P_\beta(\cos y)&\int_0^y \tilde{V}(y-y')P_\gamma(\cos y')\,\varphi(y')\,dy',\end{aligned} \tag{3.4}$$

в котором $\tilde{V}(y)$ есть лапласовский прообраз $V(r)$. С помощью обратного преобразования Лапласа для потенциалов (2.11) получаем

$$\tilde{V}^\pm(y)=\theta(y)+2\sum_{s=1}^\infty(\pm1)^s\theta(y-\pi s), \tag{3.5}$$

где $\theta(y)$ — ступенчатая функция. Здесь и далее верхний знак относится к случаю $V^+(r)$, нижний — к случаю $V^-(r)$.

Введем функции

$$\begin{aligned}&F(y)=P_\gamma(\cos y)\,\varphi(y),\quad W(x,y)=\alpha^{-1}[\cos^2 y-\cos^2 x]\,R(\cos y),\\ &R(\cos y)=P_\alpha(\cos y)\,[P_\beta(\cos y)P_\gamma(\cos y)]^{-1}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Тогда нетрудно показать, что (3.4) эквивалентно следующему дифференциально-разностному уравнению (уравнению с отклоняющимся аргументом):

$$\frac{d}{dy}[W(x,y)F(y)]-F(y)=2\sum_{s=1}^\infty(\pm1)^s\theta(y-\pi s)F(y-\pi s). \tag{3.7}$$

Отметим, что уравнение (3.7), в отличие от рассматривавшихся в литературе (например, в [19]), имеет переменный разностный порядок. Действительно, на каждом из интервалов $\Omega_k=[\pi k,\pi(k+1)]$, $k=0,1,\dots$, можно записать (штрих означает дифференцирование по y)

$$[W(x,y)F(y)]'-F(y)=0,\quad F(0)=0,\quad y\in\Omega_0, \tag{3.8}$$

$$(3.9)\qquad [W(x, y)F(y)]'-F(y)=\pm 2F(y-\pi),\quad y\in\Omega_1,$$

$$(3.10)\qquad [W(x, y)F(y)]'-F(y)=\pm 2F(y-\pi)+2F(y-2\pi),\quad y\in\Omega_2,$$

. . . .

$$(3.11)\qquad [W(x,y)F(y)]'-F(y)=2\sum_{s=1}^{k}(\pm 1)^s F(y-\pi s),\quad y\in\Omega_k,$$

. . . .

Таким образом, разностный порядок уравнения (3.7) на интервале Ω_k равен k.

Уравнение (3.8) на Ω_0 является однородным. С использованием свойств функции $W(x, y)$ нетрудно убедиться, что все производные функции $F(y)$ при $y=0$ существуют и равны нулю. Это означает, что в классе обычных (непрерывно дифференцируемых) функций уравнение (3.8) имеет только тривиальное решение $F(y)=0$. Нетривиальные решения, как показано в [11], уравнение (3.8) имеет лишь в классе обобщенных функций медленного роста. Такие решения могут отличаться от классического в точках, где $W(x, y)=0$, из которых мы рассмотрим (аргументацию см. в [11]) $y=x$; $y=x_1=\pi-x$. В соответствии с теоремой о представлении обобщенной функции с точечным носителем [20] запишем

$$(3.12)\qquad F(y)=a_0\sum_{j=0}^{n}B_j^n\delta^{(j)}(y-x)+b_0\sum_{j=0}^{n_1}G_j^{n_1}\delta^{(j)}(y-x_1),\quad y\in\Omega_0,$$

где n и n_1 — натуральные числа, a_0, b_0 произвольны.

Подставляя (3.12) в (3.8), получаем для каждой совокупности коэффициентов B_j^n и $G_j^{n_1}$ однородную алгебраическую систему уравнений. Система уравнений для B_j^n имеет решения только при выполнении условия ($\cos x\neq 0$)

$$(3.13)\qquad 1+n[W(x,y)]'_{y=x}=1-n\alpha^{-1}\sin(2x)R(\cos x)=0,$$

которое является условием квантования. Для самих коэффициентов B_j^n получаем ($B_0^n=0$)

$$(3.14)\qquad B_j^n=n(n-j)^{-1}\sum_{k=j+1}^{n}(-1)^{k-j+1}C_k^{j-1}\,W_{y=x}^{(k-j+1)}B_k^n,\quad j=n-1,\dots,1,$$

где в силу произвольности a_0 положим $B_n^n=1$.

Из системы уравнений для $G_j^{n_1}$ вытекает условие

$$(3.15)\qquad 1+n_1[W(x,y)]'_{y=x_1}=1+n_1\alpha^{-1}\sin(2x)R(-\cos x)=0.$$

Далее удобно рассматривать раздельно следующие три случая ($c=\cos x$):

а) функция $R(c)$ является нечетной,

б) функция $R(c)$ является четной,

в) функция $R(c)$ не является ни четной, ни нечетной. В случае «а» из (3.15) с учетом (3.13) следует, что $n_1=n$. Рекуррентные соотношения для коэффициентов G_j^n имеют следующее решение:

$$(3.16)\qquad G_j^n=(-1)^j B_j^n.$$

В случаях «б» и «в» условие (3.15) не выполняется ни при каком n_1. Это означает, что однородная система для G_j^n имеет только тривиальное решение: $G_j^n=0$.

Рассмотрим теперь уравнение (3.9) на Ω_1, которое с учетом найденного решения на предыдущем интервале Ω_0 принимает вид

$$(3.17)\qquad [W(x,y)F(y)]'-F(y)=\pm 2a_0\sum_{j=1}^{n}B_j^n\delta^{(j)}(y-x-\pi)\pm$$
$$\pm 2b_0\sum_{j=1}^{n}G_j^n\delta^{(j)}(y-x_1-\pi),\qquad y\in\Omega_1.$$

В случае «а» можно показать, что общее решение однородного уравнения, соответствующего (3.17), тривиально: $F_{\text{одн}}(y)=0$. Частное решение неоднородного уравнения (3.17) будем искать в виде

$$(3.18)\qquad F(y)=a_0\sum_{j=0}^{n}P_j^n\delta^{(j)}(y-x-\pi)+b_0\sum_{j=0}^{n}R_j^n\delta^{(j)}(y-x_1-\pi),$$

где P_j^n, R_j^n – подлежащие определению коэффициенты. Из (3.17), (3.18) находим для P_j^n рекуррентные формулы

$$(3.19)\qquad P_j^n[1+jW'_{y=x+\pi}]=\sum_{k=j+1}^{n}(-1)^{k-j+1}P_k^nC_k^{j-1}W_{y=x+\pi}^{(k-j+1)}\mp 2B_j^n$$

и аналогичные для R_j^n. При $j=n$, в частности, имеем из (3.19)

$$(3.20)\qquad P_n^n[1-R(-c)/R(c)]=\mp 2B_n^n.$$

В случае «а» из (3.20) следует, что $P_n^n=\mp B_n^n$, далее из (3.19) (и аналогично для R_j^n) получаем с учетом свойства $W(x,\,y)=-W(x,\,y-\pi)$, что

$$(3.21)\qquad P_j^n=\mp B_j^n,\quad R_j^n=\mp G_j^n=\mp(-1)^jB_j^n.$$

Таким образом, решение уравнения (3.17) на интервале Ω_1 совпадает в случае потенциала $V^+(r)$ (и совпадает с точностью до знака в случае потенциала $V^-(r)$) со сдвинутым на π решением на интервале Ω_0, т. е. $F(y)=$ $=\mp F(y-\pi)$, $(y\in\Omega_1,\ y-\pi\in\Omega_0)$.

В случае «б» однородное уравнение, соответствующее (3.17), имеет следующее решение:

$$(3.22)\qquad F(y)=a_1\sum_{j=1}^{n}B_j^n\delta^{(j)}(y-x-\pi),$$

где B_j^n – те же, что и в (3.14). Но тогда неоднородное уравнение (3.17) не имеет решений вообще, что проще всего понять, используя (3.20), где $R(-c)=R(c)$. Фактически это означает, что в случае «б» решения исходного уравнения (3.1) непредставимы в виде преобразования Лапласа. Поэтому дальше случай «б» не рассматриваем.

В случае «в» однородное уравнение (3.17) имеет только тривиальное решение $F_{\text{одн}}(y)=0$. Решение неоднородного уравнения (3.17) имеет вид

(3.18) при $R_j^n=0$, коэффициенты P_j^n легко определяются из (3.19), (3.20), причем ясно, что свойство (3.21) не выполняется.

Рассмотрим теперь уравнение (3.10) на Ω_2. С учетом полученных выше решений на Ω_0 и Ω_1 находим, что в случае «а» правая часть (3.10) равна нулю и уравнение фактически однородно. Его решение имеет вид

$$F(y)=a_2\sum_{j=1}^{n}B_j^n\delta^{(j)}(y-x-2\pi)+b_2\sum_{j=1}^{n}(-1)^jB_j^n\delta^{(j)}(y-x_1-2\pi), \tag{3.23}$$

где a_2, b_2 произвольны.

В случае «в» уравнение (3.10) неоднородно. Соответствующее однородное уравнение имеет решение вида (3.23), однако неоднородное уравнение решений вообще не имеет. Таким образом, случай «в» аналогичен случаю «б» и дальше также не рассматривается.

Дальнейшее решение уравнения (3.7) на интервалах Ω_3, $\Omega_4,\ldots$ в случае нечетной функции $R(c)$ проводится так же. На четных интервалах Ω_{2l} уравнение (3.7) с учетом решений на предыдущих интервалах оказывается однородным и его обобщенное решение имеет вид, аналогичный (3.12), (3.23) с носителями $x+2\pi l$, $x_1+2\pi l$. На нечетных интервалах Ω_{2l+1} в качестве неоднородности (3.7) содержится только функция $F(y)$ из предыдущего интервала Ω_{2l}. При этом $F(y)=\mp F(y-\pi)$, когда $y\in\Omega_{2l+1}$. Таким образом, общее решение уравнения (3.7) имеет вид

$$F(y)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\sum_{j=1}^{n}B_j^n\delta^{(j)}(y-x-\pi k)+ \tag{3.24}$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}b_k\sum_{j=1}^{n}(-1)^jB_j^n\delta^{(j)}(y-x_1-\pi k);\quad a_{2l+1}=\mp a_{2l},\quad b_{2l+1}=\mp b_{2l},$$

где n — натуральное число (главное квантовое число), коэффициенты B_j^n определены в (3.14), a_{2l}, b_{2l} произвольны. Они отражают известный i/m-периодический произвол решения уравнения (3.1).

В заключение этого раздела отметим, что если с самого начала интересоваться только случаем, когда функция $R(c)$ нечетна, уравнение (3.7) можно несколько упростить. Запишем наряду с (3.7) уравнение для функции $F(y-\pi)$

$$[W(x,y-\pi)F(y-\pi)]'-F(y-\pi)= \tag{3.25}$$
$$=2\sum_{s=1}^{\infty}(\pm1)^s\theta(y-\pi s-\pi)F(y-\pi s-\pi).$$

Введем, далее, функцию

$$f(y)=F(y)\pm F(y-\pi), \tag{3.26}$$

«дополняющую» решение (со знаком ∓1) на Ω_{k-1} до решения на Ω_k. Из (3.7), (3.25) с учетом свойства $W(x,\ y-\pi)=-W(x,\ y)$ находим для $f(y)$ однородное уравнение $[Wf]'-f=0$, решения которого на Ω_k могут быть найдены так же, как и выше.

Функция $F(y)$ определится через $f(y)$ следующим образом:

(3.27) $$F(y)=\sum_{s=0}^{k}(\mp 1)^s f(y-\pi s), \qquad y\in\Omega_k,$$

при этом, разумеется, в результате получим решение $F(y)$ того же вида, что и (3.24).

4. ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ В ИМПУЛЬСНОМ И РЕЛЯТИВИСТСКОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ

Используя формулы (3.3), (3.6), (3.24), в РКП находим

(4.1) $$\Phi_n(r)=(1\mp e^{-\pi rm})\left\{C_a(r)\sum_{j=1}^{n}B_j^n\left(-\frac{d}{dx}\right)^j\left[\frac{e^{-mrx}}{P_\gamma(\cos x)}\right]+\right.$$
$$\left.+C_b(r)\sum_{j=1}^{n}B_j^n\left(\frac{d}{dx_1}\right)^j\left[\frac{e^{-mrx_1}}{P_\gamma(\cos x_1)}\right]\right\}.$$

Здесь $C_{a,b}(r)-i/m$-периодические функции, с точностью до которых и определяется решение уравнения (3.1). Они следующим образом выражаются через коэффициенты a_k, b_k:

(4.2) $$C_a(r)=\sum_{l=0}^{\infty}a_{2l}\exp(-2l\pi rm),$$
$$C_b(r)=\sum_{l=0}^{\infty}b_{2l}\exp(-2l\pi rm).$$

Подчеркнем, что явный вид $C_{a,b}(r)$, или, что то же самое, вид коэффициентов a_{2l}, b_{2l} из разностного уравнения не определяется и может быть определен лишь на основе интегральных уравнений в импульсном или релятивистском конфигурационном представлениях.

В работах [7] были рассмотрены простейшие частные случаи уравнения (3.1), а именно:

(4.3) $$P_\alpha^{\mathrm{I}}(c)=P_\gamma^{\mathrm{I}}(c)=1, \quad P_\beta^{\mathrm{I}}(c)=c,$$

(4.4) $$P_\alpha^{\mathrm{II}}(c)=P_\beta^{\mathrm{II}}(c)=1, \quad P_\gamma^{\mathrm{II}}(c)=c,$$

с квазипотенциалом V^-. Вид коэффициентов a_{2l}, b_{2l} и функций $C_{a,b}(r)$ в этих случаях очень простой:

(4.5) $$a_{2l}=b_{2l}=1, \quad C_a(r)=C_b(r)=[1-\exp(-2\pi rm)]^{-1}=\tilde{\theta}(rm),$$

где $\tilde{\theta}(rm)$ — разностный аналог ступенчатой функции [6]. Из (4.1), (4.5) находим, например, волновые функции основного ($n=1$) и первого возбужденного ($n=2$) состояний в случае (4.3):

(4.6) $$\Phi_1^{\mathrm{I}}(r)=B_1^1 rm\,\mathrm{sh}[(\pi/2-x)rm]/\mathrm{sh}[\pi rm/2],$$

$$(4.7)\qquad \Phi_2^{\mathrm{I}}(r)=B_2^2\{(rm)^2\operatorname{ch}[(\pi/2-x)rm]-$$
$$-2(\sin 2x)^{-1}rm\operatorname{sh}[(\pi/2-x)rm]\}/\operatorname{sh}[\pi rm/2],$$

при этом x в (4.6), (4.7) определяется из условия квантования (3.13), т. е. $2\sin x=\alpha/n$, при $n=1$ и 2, соответственно.

Выражение для волновой функции в импульсном представлении через $\varphi(y)$, как это следует из формул (2.6), (3.3), имеет вид ($\chi_p=\operatorname{Arch}(p_0/m)$, $p=|\mathbf{p}|$)

$$(4.8)\qquad p\Psi(p)=\frac{2\pi}{m}\int_0^\infty\left[\frac{1}{\chi_p+iy}+\frac{1}{\chi_p-iy}\right]\varphi(y)\,dy$$

и является фактически комбинацией преобразований Стилтьеса. С использованием (3.24) находим следующую «полюсную» структуру функции $p\Psi(p)$ в терминах быстроты χ_p:

$$(4.9)\qquad p\Psi(p)=\frac{2\pi}{m}\sum_{j=1}^{n}B_j^n\left(-i\frac{d}{d\chi_p}\right)\left\{\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left[\frac{1}{\chi_p+ix+i\pi k}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{(-1)^j}{\chi_p-ix-i\pi k}\right]+\sum_{k=0}^{\infty}b_k\left[\frac{(-1)^j}{\chi_p+ix_1+i\pi k}+\frac{1}{\chi_p-ix_1-i\pi k}\right]\right\}.$$

Особенности функции $\varphi(y)$ (производные δ-функций) принимают в пространстве быстрот обличие полюсов.

Для примера рассмотрим случай (4.3) (V^-), когда коэффициенты a_k и b_k задаются формулами (4.5). Тогда для волновой функции с $n=1$ имеем из (4.9)

$$(4.10)\qquad p\Psi_1^{\mathrm{I}}(p)=-\frac{2\pi}{m}B_1^1\left(i\frac{d}{d\chi_p}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\chi_p+ix+i\pi k}-\frac{1}{\chi_p-ix-i\pi k}\right].$$

Сумма в (4.10) есть разложение на элементарные дроби функции $-i\sin 2x(\operatorname{ch}^2\chi_p-\cos^2 x)^{-1}$, поэтому

$$(4.11)\qquad p\Psi_1^{\mathrm{I}}(p)=C\frac{\operatorname{sh}\chi_p\operatorname{ch}\chi_p}{(\operatorname{ch}^2\chi_p-\cos^2 x)^2},$$

где $C=2\pi\sin(2x)B_1^1/m$ – нормировочная константа.

Отметим здесь, что в случае потенциала $V(r)=\alpha r^{-1}$ вид функции $\varphi(y)$ аналогичен (3.24) [11], из чего следует, что в этом случае $p\Psi(p)$ также задается полюсным выражением типа (4.9), что было использовано авторами работы [10].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящей работе предложен метод нахождения как спектров (уравнение (3.13)), так и волновых функций широкого класса квазипотенциальных уравнений, основанный на их сведении к дифференциальным уравнениям с отклоняющимся аргументом и решении затем в классе обобщенных функций медленного роста. Волновые функции в РКП находятся с помощью преобразования Лапласа, а волновые функции в импульсном представлении – с помощью преобразования Стилтьеса.

Возникающие в этом методе константы в некоторых частных случаях могут быть определены полностью и имеют очень простой вид.

Метод был изложен нами на примере квазипотенциалов (2.10), (2.11), его можно применять также и в других случаях, когда лапласовский прообраз потенциала имеет ступенчатый характер типа (3.5). К таким потенциалам, например, относится $V_{(0)}(r)=\alpha r^{-1}\operatorname{cth}(\pi r m)$ (образ пропагатора однофотонного обмена), а также следующие суперпозиции выражений (2.9):

$$V_1^{\pm}=V_{(0)}+V_{(2m)}\pm 2V_{(\sqrt{2}\,m)},\quad V^{+}(r)=\alpha r^{-1}\operatorname{cth}(\pi r m/4),$$
$$V^{-}(r)=\alpha r^{-1}\operatorname{th}(\pi r m/4).$$

Кроме того, метод применим к потенциалам, обладающим в РКП степенным поведением, из которых отметим здесь потенциал

$$(5.1)\qquad V_2(p,k)=\frac{g^2}{\sqrt{Q^2(4m^2+Q^2)}}\qquad V_2(r)=\frac{\alpha}{\pi m r^2}.$$

Уравнения (2.1), (2.2) были ранее решены с этими потенциалами в киральном пределе ($M=0$) точно [9], а в общем случае – методом ВКБ [21].

Отличие квазипотенциалов, получаемых на основе функций Грина или диаграммной техники гамильтоновой формулировки теории поля, от рассмотренных выше состоит в том, что они не являются локальными в импульсном пространстве Лобачевского, а имеют вид следующего типа [3]:

$$(5.2)\qquad V(\mathbf{p},\mathbf{k};M)=\frac{g^2}{|\mathbf{p}-\mathbf{k}|}\,\frac{1}{|\mathbf{p}-\mathbf{k}|+p_0+k_0-M},$$

и на первый взгляд уравнения с ними не могут быть сформулированы в РКП. Отметим, однако, следующее важное обстоятельство. Уравнение (2.2) с квазипотенциалом (5.2) в случае сферически-симметричных ($l=0$) волновых функций ($\Psi(\mathbf{p})=\Psi(p)$, $p=|\mathbf{p}|$) приводится к виду

$$(5.3)\qquad p_0(p_0-E)p\Psi(p)=$$
$$=-\frac{g^2m^2}{(2\pi)^3}\int_0^\infty \ln\left(\frac{p_0+k_0+|p-k|-M}{p_0+k_0+|p+k|-M}\right)k\Psi(k)\,dk/k_0.$$

Рассмотрим наряду с (5.3) уравнение (2.2) с суперпозицией квазипотенциала однобозонного обмена (2.3) с массой бозона $\mu=2m$ и потенциала (5.1), а именно:

$$(5.4)\qquad V_2(\mathbf{p},\mathbf{k})-V_{(2m)}(\mathbf{p},\mathbf{k})=\frac{-g^2}{4m^2+Q^2}+\frac{g^2}{\sqrt{Q^2(4m^2+Q^2)}}.$$

В случае сферически-симметричной волновой функции уравнение с квазипотенциалом (5.4) имеет вид

$$(5.5)\qquad p_0(p_0-E)p\Psi(p)=-\frac{g^2m^2}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\left\{\ln\frac{\operatorname{ch}[(\chi_p+\chi_k)/2]}{\operatorname{ch}[(\chi_p-\chi_k)/2]}+\right.$$
$$\left.+|\chi_p-\chi_k|/2-(\chi_p+\chi_k)/2\right\}k\Psi(k)\,dk/k_0.$$

Нетрудно убедиться, что в киральном пределе или в случае сильно связанной системы ($M \ll 2m$) уравнения (5.3) и (5.5) совпадают.

Таким образом, нелокальный (даже при $M=0$) квазипотенциал (5.2) в сферически-симметричном случае и в пределе сильной связи эквивалентен локальному потенциалу (5.4), который в РКП имеет вид

$$V_2(r)-V_{(2m)}(r)=\frac{\alpha}{r}\left\{\frac{1}{\pi m r}-\frac{1}{\operatorname{sh}(\pi m r)}\right\}.$$

и, следовательно, к нему также может быть применен предложенный выше метод.

В заключение авторы выражают благодарность А. А. Афонину, В. Г. Кадышевскому, Н. В. Максименко, В. И. Саврину, В. Н. Старикову, Г. Ю. Тюменкову и С. Г. Шульге за интерес к работе и полезные обсуждения.

Список литературы

[1] *Logunov A. A., Tavkhelidze A. N.* // Nuovo Cim. 1963. V. 29. № 2. P. 380–400.
[2] *Кадышевский В. Г., Тавхелидзе А. Н.* // Проблемы теоретической физики (Сб., посвященный 60-летию Н. Н. Боголюбова). М.: Наука, 1969. С. 261–277.
[3] *Kadyshevsky V. G.* // Nucl. Phys. 1968. V. B6. № 1. P. 125–137.
[4] *Фаустов Р. Н.* // ЭЧАЯ. 1972. Т. 3. № 1. С. 238–268.
[5] *Savrin V. I., Sidorov A. V., Skachkov N. B.* // Hadronic Jorn. 1981. V. 4. № 5. P. 1642–1679.
[6] *Кадышевский В. Г., Мир-Касимов Р. М., Скачков Н. Б.* // ЭЧАЯ. 1972. Т. 2. № 3. С. 635–690.
[7] *Капшай В. Н., Скачков Н. Б.* // ТМФ. 1982. Т. 53. № 1. С. 32–42; 1983. Т. 54. № 3. С. 406–415; Т. 55. № 1. С. 26–38; № 2. С. 236–245.
[8] *Архипов А. А., Саврин В. И.* // ТМФ. 1982. Т. 53. № 3. С. 342–357.
[9] *Капшай В. Н., Кулешов С. П., Скачков Н. Б.* // ТМФ. 1983. Т. 55. № 3. С. 349–360.
[10] *Боос Э. Э., Саврин В. И., Шаблыгин Е. М.* // ТМФ. 1987. Т. 72. № 2. С. 197–203.
[11] *Дей Е. А., Капшай В. Н., Скачков Н. Б.* // ТМФ. 1986. Т. 69. № 1. С. 55–68.
[12] *Kadyshevsky V. G., Mir-Kasimov R. M., Skachkov N. B.* // Nuovo Cim. 1968. V. 55A. № 2. P. 233–257.
[13] *Капшай В. Н., Саврин В. И., Скачков Н. Б.* // ТМФ. 1986. Т. 69. № 3. С. 368–377.
[14] *Кадышевский В. Г.* // ЖЭТФ. 1968. Т. 46. № 2. С. 654–662; № 3. С. 872–883.
[15] *Широков Ю. М.* // ЖЭТФ. 1958. Т. 35. № 4. С. 1005–1013.
[16] *Скачков Н. Б., Соловцов И. Л.* // ТМФ. Т. 43. № 3. С. 330–342.
[17] *Шапиро И. С.* // ДАН СССР. 1956. Т. 106. № 4. С. 647–649.
[18] *Скачков Н. Б., Соловцов И. Л.* // ТМФ. Т. 54. № 2. С. 183–192.
[19] *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
[20] *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
[21] *Капшай В. Н., Коноплянников В. Ф., Скачков Н. Б., Стариков В. Н.* ВКБ-решения квазипотенциальных уравнений в импульсном представлении: Препринт Р2-87-301. Дубна: ОИЯИ, 1987.

Объединенный институт ядерных исследований

Поступила в редакцию 28.XII.1988 г.

E. A. Day, V. N. Kapshay, N. B. Skachkov

EXACT SOLUTIONS OF A CLASS OF QUASIPOTENTIAL EQUATIONS FOR A SUPERPOSITION OF ONE-BOSON EXCHANGE POTENTIALS

A large class of quasipotential equation describing two-particle bound systems is studied in the case when the interaction is of the form of a superposition of one-boson exchange quasipotentials. By means of the Laplace transform the equations are reduced to differential equations with a deviating argument. Solutions of the latter are found in the class of generalised functions. Quantization conditions and wave functions in the relativistic configuration and momentum representations are found.