Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 5

УДК 517.512+519.21

МАТЕМАТИКА

В. В. ПЕТРОВ

ОЦЕНКА БЛИЗОСТИ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ ПО БЛИЗОСТИ ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ — СТИЛТЬЕСА

(Представлено академиком Ю. В. Линником 1 XII 1969)

Важную роль в теории вероятностей играют неравенства Эссеена ([1,2]), позволяющие оценить близость неубывающей ограниченной функции $F(x)$ и функции ограниченной вариации $G(x)$ по близости соответствующих преобразований Фурье — Стилтьеса в некотором конечном интервале. При этом предполагается, что либо $G(x)$ имеет равномерно по x ограниченную производную, либо $F(x)$ есть чисто разрывная функция такая, что функции $F(x)$ и $G(x)$ могут иметь разрывы только в точках $x = x_\nu$ ($x_\nu < x_{\nu+1}$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), удовлетворяющих условию $\min\limits_\nu (x_{\nu+1} - x_\nu) \geqslant L > 0$, причем $|G'(x)| \leqslant A$ всюду, за исключением точек $x = x_\nu$. Эти результаты Эссеена можно охватить одной формулировкой. Следующая теорема является обобщением теорем Эссеена.

Т е о р е м а 1. *Пусть $F(x)$ — неубывающая функция, $G(x)$ — функция ограниченной вариации на действительной прямой, $F(-\infty) = G(-\infty)$, $F(+\infty) = G(+\infty)$. Пусть*

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x), \quad g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dG(x),$$

T — произвольное положительное число. Тогда для любого числа $b > 1/2\pi$ имеет место неравенство

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \leqslant b \int_{-T}^{T} \left| \frac{f(t) - g(t)}{t} \right| dt + bT \sup_x \int_{|y| \leqslant c(b)/T} |G(x+y) - G(x)| dy, \tag{1}$$

где $c(b)$ — положительная постоянная, зависящая только от b.

В неравенстве (1) можно положить $c(b)$ равным корню уравнения

$$\int_0^{\frac{1}{4}c(b)} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8b}.$$

В частном случае, когда $F(x)$ и $G(x)$ являются функциями распределения, близкий результат был получен А. С. Файнлейбом ([3]). Равномерная оценка разности между функцией распределения $F(x)$ и некоторой функцией ограниченной вариации $G(x)$, не являющейся функцией распределения, представляет значительный интерес для приложений (например, при исследовании асимптотических разложений в предельных теоремах для сумм независимых случайных величин).

Если выполнены условия теоремы 1 и функция $G(x)$ удовлетворяет следующему условию Липшица:

$$|G(x) - G(y)| \leqslant K|x - y|^\alpha$$

при всех x и y и некоторых положительных постоянных K и α, то второе слагаемое в правой части неравенства (1) можно заменить на $2bK(c(b))^{1+\alpha}(1+\alpha)^{-1}T^{-\alpha}$.

Приведем еще одно непосредственное следствие теоремы 1, которое также является обобщением теорем Эссеена.

Теорема 2. *Пусть $F(x)$ — неубывающая функция, $G(x)$ — функция ограниченной вариации, $f(t)$ и $g(t)$ — соответствующие им преобразования Фурье — Стилтьеса, T — произвольное положительное число, $F(-\infty) = G(-\infty)$, $F(+\infty) = G(+\infty)$. Пусть $|G'(x)| \leqslant A$ всюду, за исключением точек разрыва функции $G(x)$.*

Тогда для любого числа $b > 1/2\pi$ имеет место неравенство

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \leqslant b \int_{-T}^{T} \left| \frac{f(t) - g(t)}{t} \right| dt + r(b) \frac{A}{T}, \tag{2}$$

где $r(b)$ — положительная постоянная, зависящая только от b.

В неравенстве (2) можно положить $r(b) = bc^2(b)$, где $c(b)$ — постоянная из теоремы 1.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
1 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] C. G. Esseen, Acta Math., 77, 1 (1945). [2] Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949. [3] А. С. Файнлейб, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, № 4, 859 (1968).