Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 5

УДК 517.9.49.2

МАТЕМАТИКА

М. Л. РАСУЛОВ

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ С КОМПЛЕКСНЫМ ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком И. Н. Векуа 12 XII 1969)

В связи с применением метода контурного интеграла ([1]) к решению смешанных задач для параболических систем, содержащих в граничном условии производную по времени, настоящая заметка посвящена решению граничной задачи с комплексным параметром λ для эллиптической системы второго порядка и получению оценок для этого решения.

В некоторой трехмерной области D с границей Γ рассматривается задача нахождения решения уравнения

$$A(x)\Delta u+\sum_{i=1}^{3}A_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+(A_0(x)-\lambda^2)u=\Phi(x) \tag{1}$$

при граничном условии

$$\lim_{x\to z}\{(\alpha_0(z)+\lambda^2\alpha_1(z))\frac{d}{dn_z}+(\beta_0(z)+\lambda^2\alpha_1(z)\beta_1(z)\}u(x,\lambda)=\psi(z,\lambda),\ z\in\Gamma, \tag{2}$$

где $A(x)$, $A_i(x)$ $(i=0,1,2,3)$ — квадратные матрицы порядка m; $\Phi(x)$ — вектор-функция, определенная в D; $\alpha_i(z)$, $\beta_i(z)$ $(i=0,1)$ — непрерывные на I квадратные матрицы порядка m; $\psi(z,\lambda)$ — вектор-функция, определенная на Γ; Δ — оператор Лапласа по точке $x=(x_1,x_2,x_3)$.

Предполагается выполнение условий

1⁰. Матрицы $A(x)$, $A_i(x)$ $(i=0,1,2,3)$ имеют ограниченные непрерывные производные в области D, причем корни $\nu_i(x)$ характеристического уравнения

$$\det(A(x)+\nu E)=0$$

при всех x из замкнутой области D имеют постоянные кратности m_i и строго отрицательные действительные части *.

2⁰. Матрицы $\alpha_i(z)$, $\beta_i(z)$ $(i=0,1)$ непрерывны на Γ и при достаточно больших комплексных λ матрица

$$[\alpha_0(z)+\lambda^2\alpha_1(z)]^{-1}[\beta_0(z)+\lambda^2\alpha_1(z)\beta_1(z)]$$

ограничена при $z\in\Gamma$ числом, не зависящим от λ. Вектор-функция $\psi(z,\lambda)$, аналитическая по λ, в области R_δ стремящаяся к нулю при $|\lambda|\to+\infty$ и непрерывная по z на Γ, где R_δ — область значений λ, удовлетворяющих неравенствам

$$|\lambda|\geqslant R,\qquad |\arg\lambda|\leqslant\pi/4+\delta \tag{R_δ}$$

при достаточно большом R.

В заметке ([2]) при условии 1⁰ доказано существование аналитической по λ в области R_δ фундаментальной матрицы $P(x,\xi,\lambda)$, для которой полу-

---

* Из этого условия следует параболичность соответствующей динамической системы.

чены также подходящие оценки. Из оценок фундаментальной матрицы, полученных в ([2]), следует, что для производной по внутренней нормали к Γ в точке $z \in \Gamma$ потенциала простого слоя

$$u(x, \lambda) = \int_{\Gamma} P(x, y, \lambda)\, \mu(y)\, d\Gamma_y \tag{3}$$

имеют место формулы скачка

$$\left(\frac{du(z, \lambda)}{dn_z}\right)_i = -\frac{1}{2} A^{-1}(z)\, \mu(z) + \int_{\Gamma} \frac{dP(z, y, \lambda)}{dn_z}\, \mu(y)\, d\Gamma_y, \tag{4}$$

$$\left(\frac{du(z, \lambda)}{dn_z}\right)_e = \frac{1}{2} A^{-1}(z)\, \mu(z) + \int_{\Gamma} \frac{dP(z, y, \lambda)}{dn_z}\, \mu(y)\, d\Gamma_y. \tag{5}$$

Аналогичные формулы скачка имеют место для потенциала двойного слоя.

В силу формул (4), (5) отыскание решения задачи (1) — (2) для соответствующей однородной системы в виде потенциала простого слоя (3) приводит к интегральному уравнению

$$\mu(z, \lambda) = \tilde{\psi}(z, \lambda) + \int_{\Gamma} K(z, y, \lambda)\, \mu(y, \lambda)\, d\Gamma_y, \tag{6}$$

где

$$\tilde{\psi}(z, \lambda) = -2A(z)\,(A_0(z) + \lambda^2 \alpha_1(z))^{-1} \psi(z, \lambda),$$

$$K(z, y, \lambda) = 2A(z)\left[\frac{d}{dn_z} + (\alpha_0(z) + \lambda^2\alpha_1(z))^{-1}(\beta_0(z) + \lambda^2 \alpha_1(z)\, \beta_1(z))\right] P(z, y, \lambda). \tag{7}$$

Согласно теореме заметки ([2]) о фундаментальной матрице $P(z, y, \lambda)$ при условиях 1^0—3^0 для ядра $K(z, y, \lambda)$ в области R_δ справедлива оценка

$$|K(z, y, \lambda)| \leqslant CB \exp[-\varepsilon |\lambda|\, |z - y|] \,/\, |z - y|^{2-\alpha}; \tag{8}$$

C, ε — некоторые положительные постоянные; B — квадратная матрица порядка m, составленная из единиц; ε — некоторая положительная постоянная; α — число Ляпунова; $|z - y|$ — длина вектора $z - y$; неравенство (8) понимается в том смысле, что оно имеет место между соответствующими элементами левой и правой частей (8).

Оценка (8) позволяет доказать методом последовательных приближений существование единственного аналитического по λ в области R_δ решения интегрального уравнения (6), представимого в виде

$$\mu(z, \lambda) = \tilde{\psi}(z, \lambda) + \int_{\Gamma} R(z, y, \lambda)\, \tilde{\psi}(y, \lambda)\, d\Gamma_y, \tag{9}$$

где $R(z, y, \lambda)$ — резольвента ядра $K(z, y, \lambda)$, для которой

$$R(z, y, \lambda) = K(z, y, \lambda) + \sum_{n=2}^{\infty} K_n(z, y, \lambda), \tag{10}$$

K_n — итерации ядра K. При этом, согласно (8), из (10) и (9) получаем оценки

$$|R(z, y, \lambda)| \leqslant \frac{CB}{|z - y|^{2-\alpha}} \exp(-\varepsilon |\lambda|\, |z - y|), \tag{11}$$

$$|\mu(z, \lambda)| \leqslant q, \tag{12}$$

справедливые в области R_δ, где q — постоянный столбец размера m.

Таким образом доказывается

Теорема 1. *При условиях 1^0—3^0 и при достаточно большом R существует аналитическое по λ в области R_δ решение $u^{(1)}(x, \lambda)$, задачи* (1), (2) *в случае $\Phi(x) \equiv 0$ в D, представимое в виде потенциала простого слоя (3), где $P(x, y, \lambda)$ — фундаментальная матрица решений с особенностью в точке $x = y$. Интегральное уравнение (6), полученное для плотности $\mu(z, \lambda)$ потенциала (3), имеет аналитическую по λ в области R_δ резольвенту $R(z, y, \lambda)$, для которой справедлива оценка (11) в R_δ. Если D_1 — область, лежащая вместе с границей в области D, то для $u^{(1)}(x, \lambda)$ имеют место неравенства*

$$\left|\frac{du^{(1)}(x, \lambda)}{dn_z}\right| \leqslant q \text{ при } x \in D + \Gamma, \tag{13}$$

$$\left|\frac{\partial^k u^{(1)}(x, \lambda)}{\partial x_i^k}\right| \leqslant \frac{q}{\sigma^{k+1}} \exp(-\varepsilon |\lambda| \sigma), \tag{14}$$

где σ — расстояние между границами областей D, D_1.

При условиях 1^0—3^0 доказывается также существование матрицы Грина

$$G(x, \xi, \lambda) = P(x, \xi, \lambda) - a(x, \xi, \lambda) \tag{15}$$

задачи (1), (2) (для $\psi(z, \lambda) \equiv 0$ на Γ), через которую решение задачи (1), (2) при $\psi(z, \lambda) \equiv 0$ на Γ представляется в виде

$$u^{(2)}(x, \lambda, \Phi) = -\int_D G(x, \xi, \lambda)\, \Phi(\xi)\, dD_\xi, \tag{16}$$

где $Q(x, \xi, \lambda)$ — регулярная часть матрицы Грина, которая также ищется в виде потенциала простого слоя

$$Q(x, \xi, \lambda) = \int_\Gamma P(x, y, \lambda)\, \mu(y, \xi, \lambda)\, d\Gamma_y, \quad x, \xi \in D. \tag{17}$$

По схеме доказательства теоремы 1 доказывается также

Теорема 2. *При условиях теоремы 1 для всякой непрерывно дифференцируемой и ограниченной вектор-функции $\Phi(x)$ в области $D + \Gamma$ существует решение $u^{(2)}(x, \lambda, \Phi)$ задачи (1), (2) при $\psi(z, \lambda) \equiv 0$ на Γ, определяемое формулой (16) и аналитическое по λ в области R_δ.*

Регулярная часть $Q(x, \xi, \lambda)$ матрицы Грина $G(x, \xi, \lambda)$, определяемой формулой (15), представляется в виде потенциала простого слоя (17). Для всякой пары точек $x, \xi \in D_1$ выполняется неравенство

$$|\partial^k Q(x, \xi, \lambda)/\partial x_i^k| \leqslant CB \exp[-\varepsilon |\lambda| |x - \xi|]/\sigma^{k+3} \quad (k = 0, 1, 2). \tag{18}$$

Для всех $x \in D + \Gamma$, $\xi \in D_1$ имеет место оценка

$$|dQ(x, \xi, \lambda) / dn_z| \leqslant CB \exp[-\varepsilon |\lambda|\ |x - \xi|] / \sigma^2, \quad z \in \Gamma.$$

Азербайджанский государственный университет
им. С. М. Кирова
Баку

Поступило
12 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Л. Расулов, Метод контурного интеграла, «Наука», 1964. [2] М. Л. Расулов, ДАН, 192, № 6 (1970).