Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 5

УДК 534.26

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Я. Н. ФЕЛЬД

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 8 XII 1969)

1. Идея метода. Подавляющее большинство задач математической физики сводится к нахождению решения w (w может быть скаляром, вектором, матрицей и т. д.), удовлетворяющего некоторым N условиям. Эти условия таковы, что решение существует и единственно. Одним из этих условий обычно является дифференциальное уравнение, а остальные имеют характер начальных или граничных условий, условий на бесконечности и т. п. Как уже говорилось, решение, удовлетворяющее всем этим условиям, единственно, однако, если исключить хотя бы одно из них, то существует (обычно) бесконечное множество решений, удовлетворяющих оставшимся условиям. Это обстоятельство позволяет наметить следующий путь решения задачи. Исключим одно * из заданных N условий, например, n-е. Решение, удовлетворяющее оставшимся $(N-1)$ условиям, обозначим w_n. Таких решений будет множество, обозначим его через A_n $(w_n \in A_n)$. Если исключить любое другое m-е $(m \neq n)$ условие, то решения w_m, удовлетворяющие оставшимся $(N-1)$ условиям, будут составлять некоторое новое множество A_m. Множества A_n и A_m замкнуты, если операторы, при помощи которых формулируются все N условий задачи, непрерывны. Очевидно, оба эти множества имеют одну общую точку, которая и является решением исходной задачи. Следовательно, его можно искать как пересечение указанных множеств $w = A_n \cap A_m$. Успех этого пути зависит от умения найти общие аналитические выражения для элементов функциональных множеств A_n и A_m. Обычно их можно представить при помощи выражений типа $G_n\varphi$ и $G_m\psi$, где G_n и G_m — некоторые операторы, а φ и ψ — функции, принадлежащие соответствующим классам $\mathscr{L}_n$ и $\mathscr{L}_m$, т. е.

$$w_n = G_n\varphi,\ \varphi \in \mathscr{L}_n; \quad w_m = G_m\psi,\ \psi \in \mathscr{L}_m. \tag{I}$$

Когда φ и ψ пробегают $\mathscr{L}_n$ и $\mathscr{L}_m$, w_n и w_m пробегают множества A_n и A_m соответственно. Из существования единственной общей точки у A_n и A_m следует, что имеется фиксированная пара φ и ψ, для которой справедливо равенство:

$$G_n\varphi = G_m\psi. \tag{II}$$

Эти функции и определяют общую точку, являющуюся искомым решением исходной задачи.

В ряде случаев, например при рассмотрении электродинамических или акустических задач, анализ и выкладки могут быть значительно упрощены, если перейти от общих решений — полей w, w_n, w_m (и соответствующих им множеств A_n, A_m) к их асимптотическим выражениям при $R \to \infty$, справедливым в дальней зоне: $w \backsim v$, $w_n \backsim v_n$, $w_m \backsim v_m$ $(A_n \backsim a_n,\ A_m \backsim a_m)$. При этом равенства (I) и (II) перейдут в следующие:

$$v_n = g_n\varphi,\ \varphi \in \mathscr{L}_n; \quad v_m = g_m\psi,\ \psi \in \mathscr{L}_m; \tag{Ia}$$

$$g_n\varphi = g_m\psi. \tag{IIa}$$

* Можно также исключить два или более условий.

Здесь g_n, g_m — операторы, в которые переходят G_n, G_m в дальней зоне. Выражение для поля v в дальней зоне значительно проще и в то же время оно однозначно определяет w во всем пространстве за исключением некоторой области, содержащей источники.

Равенство (II) или (IIa) может быть использовано для нахождения φ и ψ, после чего искомое решение определяется выражениями

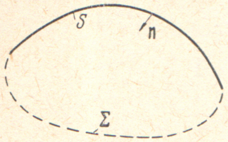

Рис. 1

$$w = G_n\varphi = G_m\psi; \quad v = g_n\varphi = g_m\psi. \tag{III}$$

В зависимости от характера задачи уравнения (II) и (IIa) могут быть различного типа и сложности и решаться различными приемами. Однако можно указать общий метод решения, базирующийся на том, что w (v) является единственной общей точкой двух множеств A_n и A_m (a_n и a_m).

Вводя некоторое метрическое пространство M, содержащее оба эти множества, легко построить* итерационный процесс, приводящий к искомому решению. Для этого, взяв произвольный элемент $w_n{}^0 \in A_n$, находим ближайший к нему элемент $w_m{}^{(1)} \in A_m$, затем найдем ближайший к последнему элемент $w_n{}^{(2)} \in A_n$ и т. д. Если этот процесс сходится, то

$$w = \lim_{\nu\to\infty} w_n^{(2\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} w_m^{(2\nu+1)}, \tag{IV}$$

аналогично находится v.

Проиллюстрируем эти общие рассуждения конкретными примерами.

2. Дифракция электромагнитной волны на металлическом экране. Пусть на металлический идеально проводящий экран S (рис. 1) падает первичная волна $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$, вторичное — дифрагированное — поле обозначим через $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$. Оно однозначно определяется следующими условиями: 1) $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ — поле, создаваемое токами, распределенными на S; 2) $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ — поле, не имеющее источников вне поверхности $S + \Sigma$ и удовлетворяющее на внешней стороне S равенству $[\mathbf{n}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^0)] = 0$. Здесь Σ — поверхность, дополняющая S до замкнутой (рис. 1), в частности, она может замыкаться на бесконечности, а $\mathbf{n}$ — нормаль к $S + \Sigma$. В данном случае $N = 2$. Множество A_1 состоит из всех полей, удовлетворяющих условию 2, а A_2 — из полей, удовлетворяющих условию 1. В качестве M удобно рассматривать линейное пространство, элементами которого являются электромагнитные поля $w = \{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$, источники которых находятся внутри повехности $S + \Sigma$ или на ней. Введем в M норму

$$\| w \| = \left(\mathrm{Re} \oint_{S_0} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*]\, d\mathbf{s}\right)^{1/2}. \tag{1}$$

Здесь S_0 — произвольная поверхность, охватывающая $S + \Sigma$.

Тогда $\|w_1 - w_2\|$ — расстояние между элементами w_1 и w_2 пространства M.

Произведем дальнейшую конкретизацию задачи. Будем считать экран S частью бесконечного вдоль образующей z цилиндра. Если поле $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$ не зависит от координаты z, а вектор $\mathbf{E}^0$ поляризован параллельно оси z, то задача сводится к плоской скалярной задаче с граничными условиями Дирихле на S, причем под S следует понимать теперь дугу, образующуюся при пересечении экрана плоскостью $z = \mathrm{const}$. Исходные соотношения при этом таковы:

$$E = E_z; \quad (\nabla^2 + k^2)E = 0; \quad E = -E^0 \text{ на } S. \tag{2}$$

Для E должны также выполняться условия излучения и условия Майкснера на краях экрана. Так как задача формулируется (см. (2)) только при помощи составляющей $E_z = E$, в дальнейшем удобно полагать $w \equiv E$, сохраняя для $\|w\|$ формулу (1).

---

* Аналогичный процесс применяется в работе (1), где находятся ближайшие элементы двух непересекающихся множеств.

Элементы множеств A_1 и A_2 теперь можно записать в виде:

$$w_1 = \int\limits_S E^0 \frac{\partial G}{\partial n} ds - \int\limits_\Sigma \varphi \frac{\partial G}{\partial n} ds, \qquad (3)$$

$$w_2 = \int\limits_S \psi H_0^{(2)}(kr)\, ds, \qquad (4)$$

где G — функция Грина уравнения Гельмгольца для области V_e, внешней к $S+\Sigma$, обращающаяся в нуль на $S+\Sigma$; формула (3) справедлива только для V_e; r — расстояние между точками интегрирования и наблюдения; φ и ψ произвольные * функции, имеющие следующий физический смысл: φ — значение E на Σ, а ψ — ток ** на S; ds — элемент дуги. Уравнение (II) для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\int\limits_S \psi H_0^{(2)}(kr)\, ds + \int\limits_\Sigma \varphi \frac{\partial G}{\partial n} ds = \int\limits_S E^0 \frac{\partial G}{\partial n} ds \qquad (5)$$

и должно выполняться для любой точки V_e.

Проверим эффективность предлагаемого метода на простом примере, когда S — отрезок прямой $b_- \leqslant x \leqslant b_+$ (лента), а Σ дополняет его до всей оси x; V_e — полуплоскость. Функция Грина при этом имеет вид

$$G(p, q) = \frac{1}{4i}\{H_0^{(2)}(kr_{pq}) - H_0^{(2)}(kr_{pq^*})\}, \qquad (6)$$

где q и q^* — точки, зеркальные относительно оси x, а r_{pq} (r_{pq^*}) — расстояние между точками p и q (p и q^*). Равенство (5) теперь запишется так:

$$\int\limits_\Sigma \varphi(p) H_1^{(2)}(kr_{pq}) \sin\alpha dx_p - \frac{2i}{k}\int\limits_S \psi(p) H_0^{(2)}(kr_{pq}) dx_p =$$

$$= \int\limits_S E^0(p) H_1^{(2)}(kr_{pq}) \sin\alpha dx_p, \quad (q \in V_e), \qquad (7)$$

где α — угол между $\mathbf{r}_{pq}$ и осью x. Помещая точку наблюдения q в дальнюю зону и заменяя $H_0^{(2)}$, $H_1^{(2)}$, r_{pq} и α их асимптотическими выражениями, получим вместо (7) уравнение типа (IIa)

$$\sin\beta \int\limits_\Sigma \varphi(x) e^{ikx\cos\beta} dx - \frac{2}{k}\int\limits_S \psi(x) e^{ikx\cos\beta} dx = \sin\beta \int\limits_S E^0(x) e^{ikx\cos\beta} dx. \qquad (8)$$

Здесь β — угол между радиус-вектором, проведенным из начала координат в точку наблюдения, и осью x. Вводя аналитические функции

$$F(u) = 2\int\limits_{b_-}^{b_+} \psi(x) e^{iux} dx; \quad f(u) = \int\limits_{b_-}^{b_+} E^0(x) e^{iux} dx,$$

$$\Phi_+(u) = \int\limits_{b_+}^{\infty} \varphi(x) e^{iux} dx, \ \operatorname{Im} u \geqslant 0; \quad \Phi_-(u) = \int\limits_{-\infty}^{b_-} \varphi(x) e^{iux} dx, \ \operatorname{Im} u \leqslant 0, \qquad (9)$$

где F и f — целые при $|b_+| < \infty$ и $|b_-| < \infty$, а Φ_+ и Φ_- голоморфны в соответствующих полуплоскостях, сведем (8) (используя обозначение $u = k\cos\beta$) к функциональному уравнению

$$-F(u) + \sqrt{k^2-u^2}(\Phi_+(u) + \Phi_-(u)) = \sqrt{k^2-u^2} f(u). \qquad (10)$$

Вследствие аналитичности всех входящих в (10) выражений оно должно выполняться на всей плоскости u. Это уравнение можно точно решить, например, для случая, когда $b_- = 0$, $b_+ = \infty$ (полуплоскость). Действительно, при этом $\Phi_+(u) = 0$, а $F(u) = F_+(u)$ и $f(u) = f_+(u)$, т. е. оказываются голоморфными только в верхней полуплоскости. Равенство (10)

---

* Они должны быть достаточно гладкими, причем ψ может иметь особенность на концах дуги S, допускаемую условиями Майкснера.

** ψ отличается от тока постоянным множителем.

принимает вид (неоднородная задача Гильберта)

$$-F_+(u) + \sqrt{k^2 - u^2}\,\Phi_-(u) = \sqrt{k^2 - u^2}\,f(u). \tag{11}$$

Это уравнение элементарно решается по известному методу ([2]). Полагая временно $\mathrm{Im}\,k < 0$, получим

$$\Phi_-(u) = \frac{i}{2\pi\sqrt{k+u}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sqrt{k+t}}{t-u}\,dt, \quad \mathrm{Im}\,u < 0. \tag{12}$$

Чтобы вычислить этот интеграл, следует задать поле E^0. Если $E^0 = \exp[-ikR\cos(\beta - \beta_0)]$ — плоская волна и $\cos\beta_0 > 0$, то (см. (9))

$$f(t) = i(t - k\cos\beta_0)^{-1}. \tag{13}$$

Подставляя это выражение в (12), получим

$$\Phi_-(u) = 1/i(k_1 - u) + i\sqrt{k + k_1}/\sqrt{k+u}\,(k_1 - u); \quad k_1 = k\cos\beta_0. \tag{14}$$

Зная Φ_- и f, найдем при помощи (11) диаграмму направленности $F_+(u)$ $(u = k\cos\beta)$ $F \equiv F_+ = (2i\sin\beta/2\cos\beta_0/2)/(\cos\beta_0 - \cos\beta)$.

Она соответствует цилиндрической волне, исходящей из края полуплоскости. Для получения тока $\psi(x)$ достаточно взять преобразование Фурье от $F(u)$. В случае конечной ленты $(b = b_+ = -b_-)$ уравнение (10) можно решить, используя указанный выше итерационный процесс. Несколько обобщая его, введем две нормы *

$$\|v\|_1 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |v(u) - v(0) - c_+(e^{ibu} - 1) - c_-(e^{-ibu} - 1)|^2 \frac{du}{u^2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\|v\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{v(u)}{\sqrt{k^2 - u^2}}\right|^2 du\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{15}$$

где

$$c_+ = \mathcal{F}_{b-0}\frac{v(u) - v(0)}{iu}; \quad c_- = \mathcal{F}_{-b+0}\frac{v(u) - v(0)}{iu}; \quad \mathcal{F}_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du\, e^{-iux}.$$

Первой из них будем пользоваться для определения $v_2 \in a_2$, ближайшего к заданному v_1, а второй для нахождения $v_1 \in a_1$, ближайшего к заданному v_2. Элементами a_2 и a_1 являются теперь функции (см. (9))

$$v_2 = F(u), \quad v_1 = \sqrt{k^2 - u^2}\{\Phi_+(u) + \Phi_-(u) - f(u)\}. \tag{16}$$

Итерационный процесс определяется условиями

$$\|v_2^{(2\nu)} - v_1^{(2\nu-1)}\|_1 = \min; \quad \|v_1^{(2\nu+1)} - v_2^{(2\nu)}\|_2 = \min.$$

Отсюда следуют, учитывая (15), (16), (9), рекуррентные формулы

$$v_2^{(2\nu)}(u) = v_2^{(2\nu)}(0) + u\int_{-b}^{b} e^{iux}\mathcal{F}_x\{[v_1^{(2\nu-1)}(\xi) - v_1^{(2\nu-1)}(0)]\,\xi^{-1}\}\,dx -$$
$$- c_+^{(2u-1)}(e^{ibu} - 1) - c_-^{(2\nu-1)}(e^{-ibu} - 1),$$

$$v_1^{(2\nu+1)}(u) = \sqrt{k^2 - u^2}\left[\left(\int_{-\infty}^{-b} + \int_{b}^{\infty}\right) e^{iux}\mathcal{F}_x\left\{\frac{v_2^{(2\nu)}(\xi)}{\sqrt{k^2 - \xi^2}}\right\}dx - f(u)\right].$$

Здесь $\mathcal{F}_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{-i\xi x}$; $v_2^{(2\nu)}(0)$ находится из условия $v_2^{(2\nu)}(u) \to 0$ при $u \to \pm\infty$ вдоль действительной оси.

Поступило
3 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Е. Вакман, Регулярный метод синтеза ФМ сигналов, М., 1967. [2] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, 1946.

* $[v(u) - v(0)]\,u^{-1} \in L_2[-\infty, \infty]$, $\mathrm{Im}\,k < 0$.