

Здесь опять получаем аналогичное выражение вида:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = M_3^{-1} \cdot M_4 \cdot M_1^{-1} \cdot M_2 \cdot \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Но матрицы M_1^{-1} и M_4 будут уже иметь вид:

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В то время как матрицы M_3^{-1} и M_2 не претерпят изменений.

Таким образом, чем меньше размеры, массы частиц, ширина потенциала и разность энергий $E - U_0$, тем больше вероятность прохождения частицы через барьер.

Литература

1. Балашов, В. В. Квантовая теория столкновений / В. В. Балашов. – М. : МАКС Пресс, 2012. – 292 с.
2. Criffiths, David J. Introduction to Quantum Mechanics / David J. Criffiths. – Prentice Hall. Upper Saddle. River, New Jersey, 1994. – 394 p.

А. Д. Жуковец

(ГГУ имени Ф. Скорины, Гомель)

Науч. рук. **В. Н. Капшай**, канд. физ.-мат. наук, доцент

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРОХОЖДЕНИЯ И ОТРАЖЕНИЯ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОТЕНЦИАЛА В СЛУЧАЕ ОТ 0 ДО a

Рассмотрим прохождение частицы через прямоугольный потенциальный барьер от 0 до a , чтобы определить коэффициенты прохождения и отражения в данном случае.

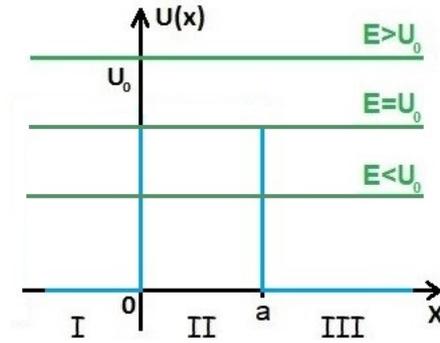


Рисунок 1 – График потенциального барьера (от 0 до a).
Возможные значения энергии: $E > U_0$, $E = U_0$, $E < U_0$

Для начала разберем случай с $E > U_0$ (рисунок 1). Запишем одномерное уравнение Шредингера для каждой из областей [1]:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\hbar^2}{2m}\Psi_I''(x) &= E\Psi_I(x), & x < 0, \\
 -\frac{\hbar^2}{2m}\Psi_{II}''(x) + U_0(x)\Psi_{II}(x) &= E\Psi_{II}(x), & 0 < x < a, \\
 -\frac{\hbar^2}{2m}\Psi_{III}''(x) &= E\Psi_{III}(x), & x > a.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Используем условия сшивания:

$$\begin{cases} \Psi_I(0) = \Psi_{II}(0), \\ \Psi_I'(0) = \Psi_{II}'(0), \end{cases} \quad \begin{cases} \Psi_{II}(a) = \Psi_{III}(a), \\ \Psi_{II}'(a) = \Psi_{III}'(a). \end{cases} \tag{2}$$

Упростим выражения (1), умножив их на $-\frac{2m}{\hbar^2}$, введём замены:

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = k^2, \quad \frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - E) = K^2,$$

тогда: $\Psi_I''(x) = -k^2\Psi_I(x)$, $\Psi_{II}''(x) = -K^2\Psi_{II}(x)$,
 $\Psi_{III}''(x) = -k^2\Psi_{III}(x)$.

Решения данных уравнений и первые производные от них имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \Psi_I(x) &= Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, & \Psi_I'(x) &= Aike^{ikx} - Bike^{-ikx}, \\
 \Psi_{II}(x) &= C_1e^{iKx} + C_2e^{-iKx}, & \Psi_{II}'(x) &= C_1iKe^{iKx} - C_2iKe^{-iKx}, \\
 \Psi_{III}(x) &= De^{ikx}, & \Psi_{III}'(x) &= Dike^{ikx}.
 \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в условия сшивания [2]:

$$\begin{cases} A + B = C_1 + C_2, \\ Aik - Bik = C_1 iK - C_2 iK, \\ C_1 e^{iKa} + C_2 e^{-iKa} = D e^{ika}, \\ C_1 iK e^{iKa} - C_2 iK e^{-iKa} = D iK e^{ika}. \end{cases} \quad (3)$$

Решив данную систему, получим искомые коэффициенты. Однако нахождение коэффициентов прохождения и отражения способом, описываемым в большинстве учебников, является сложным и может привести к большому количеству ошибок. Поэтому используем матричный метод их определения.

Запишем два последних уравнения системы (3) в виде произведения матриц:

$$\begin{bmatrix} e^{iKa} & e^{-iKa} \\ iK e^{iKa} & -iK e^{-iKa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{ika} & e^{-ika} \\ iK e^{ika} & -iK e^{-ika} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Введём замены:

$$M_1 = \begin{bmatrix} e^{iKa} & e^{-iKa} \\ iK e^{iKa} & -iK e^{-iKa} \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} e^{ika} & e^{-ika} \\ iK e^{ika} & -iK e^{-ika} \end{bmatrix}.$$

Найдем определитель матрицы M_1 и обратную матрицу M_1^{-1} :

$$\det M_1 = -2iK, \\ M_1^{-1} = \frac{1}{-2iK} \begin{bmatrix} -iK e^{-iKa} & -e^{-iKa} \\ -iK e^{iKa} & e^{iKa} \end{bmatrix}.$$

Теперь можно выразить коэффициенты C_1 и C_2 :

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2iK} \begin{bmatrix} -iK e^{-iKa} & -e^{-iKa} \\ -iK e^{iKa} & e^{iKa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{ika} & e^{-ika} \\ iK e^{ika} & -iK e^{-ika} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} = \\ = M_1^{-1} \cdot M_2 \cdot \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Запишем два первых уравнения системы (3) в виде произведения матриц:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ ik & -ik \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ iK & -iK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}.$$

Введём замены:

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ ik & -ik \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ iK & -iK \end{bmatrix}.$$

Найдем определитель матрицы M_3 и обратную матрицу M_3^{-1} :

$$\det M_3 = -2ik,$$

$$M_3^{-1} = \frac{1}{-2ik} \begin{bmatrix} -ik & -1 \\ -ik & 1 \end{bmatrix}.$$

Выразим коэффициенты A и B , необходимые для определения коэффициента отражения R :

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{-2ik} \begin{bmatrix} -ik & -1 \\ -ik & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ iK & -iK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = M_3^{-1} \cdot M_4 \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}.$$

Подставляя в полученное выражение найденные ранее коэффициенты C_1 и C_2 (см. формулу (4)) получим:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = M_3^{-1} \cdot M_4 \cdot M_1^{-1} \cdot M_2 \cdot \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Рассматривая случай с $E < U_0$ (рисунок 1), введем замены:

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = k^2, \quad (U_0 - E) = \alpha^2,$$

тогда: $\Psi_{II}''(x) = \alpha^2 \Psi_{II}(x)$.

Решение данного уравнения запишем в виде:

$$\Psi_{II}(x) = C_1 e^{-\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}.$$

Первая производная:

$$\Psi_{II}'(x) = -C_1 \alpha e^{-\alpha x} - C_2 \alpha e^{\alpha x}.$$

Остальные уравнения системы (2) останутся без изменений. Подставив полученные выражения в условия сшивания и проделав необходимые операции, получим выражение, аналогичное (5):

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = M_3^{-1} \cdot M_4 \cdot M_1^{-1} \cdot M_2 \cdot \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Только здесь матрицы M_1^{-1} и M_4 будут иметь вид:

$$M_1^{-1} = \frac{1}{2a} \begin{bmatrix} ae^{aa} & -e^{aa} \\ ae^{-aa} & e^{-aa} \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -a & a \end{bmatrix}.$$

Матрицы M_3^{-1} и M_2 не претерпят изменений.

В случае $E = U_0$ (рисунок 1), скобка $(E - U_0)$ будет равняться нулю, вторая производная $\Psi_{II}''(x)$ также будет равняться нулю. Решением данного уравнения будет:

$$\Psi_{II}(x) = C_1 + C_2x.$$

Первая производная:

$$\Psi_{II}'(x) = C_2.$$

Здесь опять получаем аналогичное выражение вида:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = M_3^{-1} \cdot M_4 \cdot M_1^{-1} \cdot M_2 \cdot \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Но матрицы M_1^{-1} и M_4 будут уже иметь вид:

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В то время как матрицы M_3^{-1} и M_2 не претерпят изменений.

Таким образом, найденные матрицы позволяют определить коэффициенты прохождения и отражения для потенциального барьера от 0 до a , при этом они имеют более простой вид по сравнению с матрицами, полученными в случае области от $-a$ до a , а значит их нахождение является менее трудоемким.

Литература

1. Балашов, В. В. Квантовая теория столкновений / В. В. Балашов. – М. : МАКС Пресс, 2012. – 292 с.
2. Criffiths, David J. Introduction to Quantum Mechanics / David J. Criffiths. – Prentice Hall. Upper Saddle. River, New Jersey, 1994. – 394 p.

В. Ю. Златина

(ГГТУ имени П. О. Сухого, Гомель)

Науч. рук. **В. Ю. Гавриш**, канд. физ.-мат. наук, доцент

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ δ -ФУНКЦИИ ДИРАКА

Введение. Решение задач квантовой теории рассеяния невозможно без использования аппарата математической физики. Так даже простейшие задачи расчета наблюдаемых на эксперименте величин в физике элементарных частиц требуют специализированных методов.

Работа посвящена приложениям δ -функции Дирака. В разделе **1** приведено определение функции Дирака в терминах функционального анализа. В разделе **2** изложены основные тождества для δ -функции. Как результат работы, в разделе **3** приведен пример использования функции Дирака для расчета фазового объема конечного двухчастичного состояния.

1. Определение δ -функции Дирака. Сформулируем задачу определения плотности точки единичной массы [1]. Для простоты будем считать, что эта точка совпадает с началом координат. От такой плотности потребуем, чтобы интеграл по любому объему V давал бы массу вещества, заключенного в этом объеме, т.е.

$$\int_V \delta(x) dx = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \in V, \\ 0, & \text{если } 0 \notin V, \end{cases} \quad (1)$$

где $\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x)$, $f_\varepsilon(x)$ – средняя плотность такой точки, $f_\varepsilon(x) = \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}$. Показано [1], для любой непрерывной функций $\varphi(x)$ предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ числовой последовательности определен как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \varphi(0). \quad (2)$$