Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 4

УДК 517.91 *МАТЕМАТИКА*

Е. С. БИРГЕР

О НЕСАМОСОПРЯЖЕННОМ ОПЕРАТОРЕ $-y''+p(x)y$ НА ОСИ $(-\infty, \infty)$

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 21 XI 1969)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$-y''+p(x)y=\lambda y, \tag{1}$$

где $p(x)=q(x)+ir(x)$ — комплекснозначная функция вещественного аргумента x, λ — комплексный параметр. С уравнением (1) связывается действующий в $L^2(-\infty, \infty)$ несамосопряженный дифференциальный оператор

$$Ly=-y''+p(x)y,$$

область определения $D(L)$ которого составляют функции $y(x)\in L^2(-\infty, \infty)$, абсолютно непрерывные в каждом конечном интервале вместе со своей производной и такие, что $-y''+p(x)y\in L^2(-\infty, \infty)$.

В настоящей работе с помощью вспомогательной системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка исследуется вопрос о существовании нетривиальных решений уравнения (1), принадлежащих $L^2(-\infty, \infty)$, и даются условия, накладываемые на $p(x)$, при выполнении которых оператор L обладает вполне непрерывной резольвентой и, следовательно, дискретным спектром. Приводимые в работе результаты примыкают к некоторым результатам М. А. Наймарка ([1]) и В. Б. Лидского ([2]).

Рассмотрим уравнение

$$-y''+p(x)y=0 \tag{2}$$

и предположим, что при $x\in[a, b]$ функция $p(x)$ представима в виде

$$p(x)=\rho(x)e^{i\varphi_0(x)},$$

где $\rho(x)$ и $\varphi_0(x)$ — непрерывные функции, причем

$$\rho(x)\geqslant\rho_0>0. \tag{3}$$

Сделаем в (2) замену

$$y'=y\operatorname{ctg}\theta(x)e^{i\varphi(x)}.$$

Эта замена является аналогом замены Прюфера ([3]), часто используемой при исследовании самосопряженного случая. Для функций $\theta(x)$ и $\varphi(x)$ получим систему нелинейных уравнений

$$\begin{aligned}\theta'&=\cos^2\theta\cos\varphi-\sin^2\theta\rho(x)\cos(\varphi-\varphi_0(x)),\\ \varphi'&=-\operatorname{ctg}\theta\sin\varphi-\operatorname{tg}\theta\rho(x)\sin(\varphi-\varphi_0(x)).\end{aligned} \tag{4}$$

Теорема 1. *Каждому нетривиальному решению $y(x)$ уравнения* (2) *соответствует пара вещественных непрерывно дифференцируемых на интервале $[a, b]$ функций $\theta(x)$ и $\varphi(x)$ таких, что*

$$y'(x)/y(x)=\operatorname{ctg}\theta(x)e^{i\varphi(x)}.$$

Функции $\theta(x)$ *и* $\varphi(x)$ *удовлетворяют системе* (4) *и обладают, кроме того, следующими свойствами:*

1) $\theta(x)$ *может пересекать линии* $\theta = k\pi$ *снизу вверх лишь в тех точках, где* $\varphi(x) = 2m\pi$, *а сверху вниз лишь в тех точках, где* $\varphi(x) = (2m + 1)\pi$.

2) $\theta(x)$ *может пересекать линии* $\theta = \pi/2 + k\pi$ *снизу вверх лишь в тех точках, где* $\varphi(x) = \varphi_0(x) + (2m+1)\pi$, *а сверху вниз лишь в тех точках, где* $\varphi(x) = \varphi_0(x) + 2m\pi$.

Функции $\theta(x)$ *и* $\varphi(x)$ *определяются однозначно с точностью до преобразований*

$$\theta = \theta + n\pi; \quad \varphi = \varphi + 2n\pi; \quad \theta = -\theta,\ \varphi = \varphi + \pi.$$

Предположим, что функция $p(x) = \rho(x)e^{i\varphi_0(x)}$ такова, что при $x \in [a, b]$ ее значения лежат в открытом угле, замыкание которого не содержит отрицательной вещественной полуоси, т. е. при $x \in [a, b]$

$$\gamma < \arg\varphi_0(x) < \delta, \tag{5}$$

где $-\pi < \gamma < 0$, $0 < \delta < \pi$.

Лемма 1. *Пусть функция* $p(x)$ *удовлетворяет на отрезке* $[a, b]$ *условиям* (3) *и* (5), *причем* $\delta - \gamma \leqslant \pi$. *Тогда, если функции* $\theta(x)$ *и* $\varphi(x)$ *являются решениями системы* (4) *такими, что*

$$0 < \theta(a) < \pi/2, \quad \gamma < \varphi(a) < \delta,$$

то и при всех $x \in [a, b]$ *выполняются соотношения*

$$0 < \theta(x) < \pi/2, \quad \gamma < \varphi(x) < \delta.$$

Если $p(x)$ непрерывно дифференцируема при больших по модулю значениях x, удовлетворяет на интервале $(-\infty, \infty)$ условиям (3) и (5) и

$$\lim_{|x|\to\infty} p'(x)/p^{3/2}(x) = 0, \tag{6}$$

то уравнение (2) имеет единственные с точностью до постоянных множителей решения $\chi(x)$ и $\psi(x)$, принадлежащие соответственно $L^2(-\infty, 0)$ и $L^2(0, \infty)$.

При этом

$$\chi'(x)\,/\,\chi(x) = \sqrt{p(x)}\,(1 + o(1)), \quad x \to -\infty, \tag{7}$$

$$\psi'(x)/\psi(x) = -\sqrt{p(x)}\,(1 + o(1)), \quad x \to +\infty. \tag{8}$$

Значение $\sqrt{p(x)}$ выбирается в правой полуплоскости.

Используя лемму 1 и асимптотические формулы (7) и (8), можно доказать следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть функция* $p(x) = \rho(x)e^{i\varphi_0(x)}$ *непрерывно дифференцируема на интервале* $(-\infty, \infty)$, *удовлетворяет на этом интервале условиям* (3), (5) *и* (6) *и пусть, кроме того, при* $x \in (-\infty, \infty)$

$$|\varphi_0'(x)|/\sqrt{\rho(x)} \leqslant d,$$

где $d = \min(|\sin\gamma|, \sin\delta, \cos\gamma/2, \cos\delta/2)$. *Тогда решения* $\chi(x)$ *и* $\psi(x)$ *линейно независимы, и уравнение* (2) *не имеет нетривиальных решений, принадлежащих* $L^2(-\infty, \infty)$.

Положим $V_c^{\gamma,\delta} = \{z : \gamma < \arg(z - c) < \delta\}$. Из леммы 2 следует

Теорема 2. *Пусть функция* $p(x)$ *в уравнении*

$$-y'' + p(x)y = \lambda y \tag{9}$$

удовлетворяет условию (6) *и пусть существует такое вещественное* c, *что при* $x \in (-\infty, \infty)$

$$p(x) \in V_c^{\gamma,\delta},$$

где $-\pi < \gamma < 0$, $0 < \delta < \pi$. *Тогда существует такое вещественное число* λ_0, *что при вещественных* $\lambda \leqslant \lambda_0$ *уравнение* (9) *не имеет нетривиальных решений, принадлежащих* $L^2(-\infty, \infty)$.

При выполнении условий теоремы 2 на вещественной полуоси $\lambda \leqslant \lambda_0$ нет точек дискретного спектра оператора L. Следующая теорема дает достаточное условие дискретности спектра оператора L.

Теорема 3. *Пусть функция* $p(x) = q(x) + ir(x)$ *удовлетворяет условию* (6), *и пусть существуют такие вещественные постоянные* k^- *и* k^+, *что*

$$\lim_{x \to -\infty} (q(x) + k^- r(x)) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to +\infty} (q(x) + k^+ r(x)) = +\infty.$$

Тогда оператор

$$Ly = -y'' + p(x)y$$

обладает вполне непрерывной резольвентой и, следовательно, чисто дискретным спектром.

Отметим, что при предположениях теоремы 3 совокупность значений квадратичного функционала (Ly, y) может, в отличие от случаев, рассмотренных в [2], заполнять всю плоскость.

Автор приносит благодарность А. А. Абрамову за полезные советы и В. Б. Лидскому за обсуждение результатов.

Институт автоматики и телемеханики
(технической кибернетики)
Москва

Поступило
13 XI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Наймарк, ДАН, 85, № 1 (1952). [2] В. Б. Лидский, ДАН, 113, № 1 (1957). [3] Ф. Трикоми, Дифференциальные уравнения, М., 1962.