Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 4

УДК 517.581 МАТЕМАТИКА

А. А. БОНАМИ

О СОПРЯЖЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 18 XI 1969)

Обозначим $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ точки n-мерного эвклидова пространства $\mathbf{R}^n$; y — действительная переменная; $(\mathbf{x}, y) = (x_1, \ldots, x_n, y)$ — точки декартового произведения $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R} = R^{n+1}$; $\mathbf{t}\cdot\mathbf{x} = t_1x_1 + \ldots + t_nx_n$; $|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$; $d\mathbf{t}$ — элемент меры Лебега в $\mathbf{R}^n$. В полупространстве $\mathbf{R}_+^{n+1} = \mathbf{R}^n \times (0, +\infty)$ будем рассматривать гармонические векторы $\mathbf{F}(\mathbf{x}, y) = (U, V_1, \ldots, V_n)$, т. е. ([1]) вектор-функции $(\mathbf{x}, y)$, компоненты которых являются гармоническими функциями, удовлетворяющими обобщенным условиям Коши — Римана

$$\frac{\partial U}{\partial y} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} = 0,\ \frac{\partial U}{\partial x_k} = \frac{\partial V_k}{\partial y},\ \frac{\partial V_k}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_k}, \quad k \neq j;\ k, j = 1,2,\ldots, n.$$

В настоящей работе обобщаются на многомерный случай теоремы, доказанные Харди, Литтльвудом ([2]) и Кавата ([3]) на плоскости.

Обозначим

$$M(y) = M(\mathbf{F}, y) = \max_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n} |\mathbf{F}(\mathbf{x}, y)|; \tag{1}$$

$$M_p(y) = M_p(\mathbf{F}, y) = \left\{\int_{\mathbf{R}^n} |\mathbf{F}(\mathbf{x}, y)|^p\, d\mathbf{x}\right\}^{1/p}. \tag{2}$$

Определение 1. Скажем, что гармонический вектор $\mathbf{F}(\mathbf{x}, y)$ в $\mathbf{R}_+^{n+1}$ принадлежит классу $\mathbf{H}^p$, $p > 0$, если $M_p(\mathbf{F}, y) < C$, где C не зависит от y.

Определение 2. Скажем, что гармонический вектор $\mathbf{F}(\mathbf{x}, y)$ в $\mathbf{R}_+^{n+1}$ принадлежит классу $\mathbf{S}^p$, $p > 0$, если для всякого $y_0 > 0$ существует константа $C(y_0, \mathbf{F})$ такая, что для всех $y \geqslant y_0$ имеет место $M_p(\mathbf{F}, y) \leqslant C(y_0, \mathbf{F})$.

Как известно ([1]), при $p \geqslant (n-1)/n$ у гармонических векторов $\mathbf{F}(\mathbf{x}, y) \in \mathbf{H}^p$ существуют почти всюду в $\mathbf{R}^n$ конечные граничные значения $f(\mathbf{x})$, когда $y \downarrow 0$, а для $p > (n-1)/n$ имеет место также сходимость в среднем с показателем p.

Теорема 1. *Пусть $f(\mathbf{x}) = (u, v_1, \ldots, v_n) \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$. Тогда условие, необходимое и достаточное для того, чтобы $f(\mathbf{x})$ было граничным значением при $y \downarrow 0$ гармонического вектора $\mathbf{F}(\mathbf{x}, y)$ класса $\mathbf{H}^2$ в $\mathbf{R}_+^{n+1}$, состоит в том, что преобразование Фурье функции $f(\mathbf{x})$ может быть представлено в виде*

$$g(\mathbf{x})\left(e_0 + i\sum_{k=1}^{n} e_k \frac{t_k}{|\mathbf{t}|}\right), \tag{3}$$

где $e_0, e_1, \ldots, e_n$ — единицы алгебры Клиффорда, а

$$g(\mathbf{x}) = \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{|\mathbf{t}|<T} u(t)\, e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{t}} d\mathbf{t}.$$

Доказательство получается применением теоремы Планшереля к представлению $\mathbf{F}(\mathbf{x}, y)$ с помощью интеграла Пуассона. В результате получается также следующее интегральное представление для гармонических векторов класса $\mathbf{H}^2$ в $\mathbf{R}_+^{n+1}$

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbf{R}^n} g(\mathbf{t}) e^{-y|\mathbf{t}|} \left(e_0 + i \sum_{k=1}^{n} e_k \frac{t_k}{|\mathbf{t}|}\right) e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{t}} d\mathbf{t}. \tag{4}$$

Лемма. *Если* $p \geqslant (n-1)/n$, $a \geqslant 0$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, y) = (U, V_1, \ldots, V_n)$ — *гармонический вектор класса* $\mathbf{S}^p$ *в* $\mathbf{R}_+^{n+1}$, *то из неравенства*

$$M_p(U, y) \leqslant Cy^{-a} \tag{5}$$

следует, что

$$|\mathbf{F}(\mathbf{x}, y)| \leqslant BCy^{-B}, \tag{6}$$

где B *и* C — *положительные константы.*

Доказательство: Рассмотрим вначале случай $(n-1)/n \leqslant p \leqslant 1$. Выберем $C = 1$, $y_0 > 0$ и рассмотрим гармонический вектор $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, y) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, y + y_0)$. Согласно [4], $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, y) = (W_0, W_1, \ldots, W_n)$ принадлежит $\mathbf{H}^1 \cap \mathbf{H}^2$ в $\mathbf{R}_+^{n+1}$. Пусть $\mathbf{G}(t)$ — преобразование Фурье для граничного значения $W_0(\mathbf{x})$ функции $W_0(\mathbf{x}, y)$. Тогда

$$G(\mathbf{t}) e^{-y|\mathbf{t}|} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbf{R}^n} W_0(\mathbf{x}, y) e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{t}} d\mathbf{t}. \tag{7}$$

Если $p = 1$, то из (4) и (5) следует, что

$$|\mathbf{F}(\mathbf{x}, y + y_0)| \leqslant \frac{2}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbf{R}^n} |G(\mathbf{t})| e^{-(y+y_0)|\mathbf{t}|} d\mathbf{t} \leqslant \frac{2}{(2\pi)^n} (y + y_0)^{-a} \int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{-y_0|\mathbf{t}|} d\mathbf{t},$$

или $|\mathbf{F}(\mathbf{x}, y + y_0)| = O((y + y_0)^{-a-n})$.

Если $(n-1)/n \leqslant p < 1$, то из (7) и (5) имеем

$$|G(\mathbf{t})| e^{-y|\mathbf{t}|} \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} M^{1-p}(U, \eta) \eta^{-ap}, \quad \eta = y + y_0. \tag{8}$$

Пусть $\eta_1 = y_1 + y_0 > y + y_0 = \eta$. Тогда

$$|\mathbf{F}(\mathbf{x}, \eta)| \leqslant \frac{2}{(2\pi)^{n/2}} M^{1-p}(U, \eta) \int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{-(y_1-y)|\mathbf{t}|} d\mathbf{t}, \tag{9}$$

$$|\mathbf{F}(\mathbf{x}, \eta)| \leqslant KM^{1-p}(\mathbf{F}, \eta) \eta^{-ap} (\eta_1 - \eta)^{-n}, \quad K = \text{const}.$$

Используя результаты работы [2], из (9) получаем

$$M(\mathbf{F}, y) \leqslant By^{-B}.$$

Теорема 2. *Если гармонический вектор* $\mathbf{F}(\mathbf{x}, y) = (U, V_1, \ldots, V_n)$ *класса* $\mathbf{S}^p$ в $\mathbf{R}_+^{n+1}$, $p \geqslant (n-1)/n$, $a \geqslant 0$, $q > p$, *то из*

$$M_p(U, y) \leqslant Cy^{-a} \tag{10}$$

следует, что

$$M_q(\mathbf{F}, y) \leqslant BCy^{-a-n/p+n/q}. \tag{11}$$

В частности, при $q = \infty$

$$M(\mathbf{F}, y) \leqslant BCy^{-a-n/p}. \tag{12}$$

Здесь B, C — *постоянные, не зависящие от* y.

Доказательство проведем вначале для $(n-1)/n \leqslant p \leqslant 1$. Достаточно доказать (12). Обозначим

$$\tau = 1/\eta_1, \quad t = 2/\eta_1 = 1/\eta, \quad h(\tau) = \ln(\eta_1^{a+n/p} M(\eta_1)), \quad b = 1-p.$$

Тогда, если воспользоваться (9),

$$h(\tau) - bh(2\tau) \leqslant (a + n/p) \ln(\eta_1/\eta) + n \ln(\eta/(\eta_1 - \eta)) < B.$$

На основании ([2]) либо $h(\tau)$ ограничена константой, и теорема верна, либо

$$\overline{\lim_{\tau\to\infty}}\, h(\tau)/\ln\tau = \infty,$$

но последнее противоречит лемме.

Случай $p > 1$ получается с помощью следующих двух теорем.

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{F}(\mathbf{x}, y) = (U, V_1, \ldots, V_n)$ — *гармонический вектор класса* $\mathrm{S}^p(\mathrm{R}_+^{n+1})$, $p > 1$. *Существует константа* C_p, *зависящая только от* p, *такая, что для всякого* $y > 0$ *выполняется неравенство*

$$\| \mathbf{F}(\mathbf{x}, y) \|_p \leqslant C_p \| U(\mathbf{x}, y) \|_p.$$

Теорема 4. *Если* $p \geqslant (n-1)/n$, $a \geqslant 0$, $q > p$ *и гармонический вектор* $\mathbf{F}(\mathbf{x}, y)$ *принадлежит классу* S^p *в* R_+^{n+1}, *то из условия*

$$M_p(\mathrm{F}, y) = O(y^{-a}) \tag{13}$$

следует, что

$$M_q(\mathbf{F}, y) = O(y^{-a-n/p+n/q}). \tag{14}$$

В частности, для $q = \infty$

$$M(\mathbf{F}, y) = O(y^{-a-n/p}). \tag{15}$$

Доказательство при $(n-1)/n \leqslant p \leqslant 1$ следует из уже проведенной части доказательства теоремы 2. Пусть $p > 1$ и возьмем $\eta > 0$. В полупространстве $\mathrm{R}^n \times (\eta, +\infty)$ функция $F(\mathbf{x}, y) \in H^p$, следовательно ([1]), представима интегралом Пуассона — Лебега

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, y) = \frac{1}{c_n} \int\limits_{\mathrm{R}^n} \frac{F(\mathbf{t}, \eta)(y-\eta)}{(|\mathbf{x}-\mathbf{t}|^2 + (y-\eta)^2)^{(n+1)/2}}\, d\mathbf{t}, \quad c_n = \frac{\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma((n+1)/2)}.$$

С помощью неравенства Гёльдера имеем

$$|\mathbf{F}(\mathbf{x}, y)| \leqslant M_p(\mathbf{F}, \eta) \frac{1}{c_n} \left\{ \int\limits_{\mathrm{R}^n} \frac{(y-\eta)^{p'}}{(|\mathbf{x}-\mathbf{t}|^2 + (y-\eta)^2)^{(n+1)p'/2}}\, d\mathbf{t} \right\}^{1/p'},$$

$p' = p/(p-1)$, а затем

$$|\mathbf{F}(\mathbf{x}, y)| = O(y^{-a-n/p}).$$

Чтобы доказать (11), заметим на основании (10), что

$$M_q(\mathbf{F}, y) \leqslant M^{(q-p)/q}(\mathbf{F}, y)\, M_p^{p/q} \leqslant B y^{-a-n/p+n/q}.$$

Владимирский государственный педагогический институт им. П. И. Лебедева-Полянского

Поступило 24 X 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. M. Stein, G. Weiss, Acta Math., 103, № 1—2, 25 (1960). [2] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, J. reine u. angew. Math., 167, 405 (1932). [3] T. Kawata, Japan. J. Math., 13, № 3, 421 (1936). [4] U. Kuran, Proc. London Math. Soc., (3), 16, 478 (1966).