Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 4

УДК 518:517.944/.947 **МАТЕМАТИКА**

Е. А. ВОЛКОВ

АПОСТЕРИОРНЫЕ И ВЕСОВЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ, ВЫЧИСЛЯЕМЫХ МЕТОДОМ СЕТОК

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 20 XI 1969)

Даны апостериорные оценки погрешности решений методом сеток задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Пуассона, выражающиеся через приближенное решение и содержащие только известные величины. Эти оценки имеют неулучшаемый второй порядок относительно шага сетки h ([1]) и найдены при требованиях гладкости к правой части уравнения, границе и граничным значениям, которые не могут быть существенно снижены ([2, 3]). Получены оценки погрешности решений и их производных любого порядка, вычисляемых через приближенное решение, зависящие от веса $\rho + h$, где ρ — расстояние от границы области.

1. Рассмотрим краевую задачу

$$\Delta u = f \text{ на } \Omega, \qquad u = \varphi \text{ на } \gamma, \tag{1}$$

где $\Delta \equiv \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$; γ — граница конечной двумерной области Ω; f и φ — заданные функции. Скажем, что $\gamma \in C_{k,\lambda}$, $k \geqslant 2$, если $(k-2)$-я производная кривизны γ непрерывна и удовлетворяет условию Гёльдера в степени λ; функция $f \in C_{k,\lambda}(G)$, $k \geqslant 0$, если f имеет на G k-е производные, удовлетворяющие условию Гёльдера в степени λ; $f \in C_{k,\lambda}^{m,\mu}(\Omega)$, $m \geqslant k$, $m + \mu \geqslant k + \lambda$, если $f \in C_{k,\lambda}(\Omega)$ и, кроме того, f m раз дифференцируема на Ω и

$$\max_{D^n} \sup_{P \in \Omega} \rho_P^{n-k-\lambda} |D^n f(P)| < \infty, \qquad k < n \leqslant m,$$

$$\max_{D^m} \sup_{P, Q \in \Omega} \rho_*^{m+\mu-k-\lambda} \frac{|D^m f(P) - D^m f(Q)|}{|P - Q|^{\mu}} < \infty,$$

где D^q — оператор дифференцирования по x и y q-го порядка; ρ_P — расстояние от P до γ; $\rho_* = \min\{\rho_P, \rho_Q\}$; $|P - Q|$ — нижняя грань длин кривых, соединяющих точки P и Q и целиком лежащих на Ω.

Построим сетку прямыми $x, y = 0, \pm h, \pm 2h, \ldots$ Пусть Ω_h — множество узлов сетки на Ω таких, что все внутренние точки отрезков прямых, соединяющих их с четырьмя соседними узлами, принадлежат Ω; γ_h — множество остальных узлов на Ω;

$$Au(x, y) \equiv (u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h)) / 4.$$

Введем операторы l_h^ν и g_h^ν, обладающие следующими свойствами. Значения операторов l_h^ν и g_h^ν в каждой точке $P \in \gamma_h$ выражаются линейно через значения функции в конечном числе точек $\gamma \cup \gamma_h \cup \Omega_h$, удаленных от P на расстояние, не превышающее $\varkappa_1^\nu h$, причем сумма модулей коэффициентов оператора l_h^ν при значениях функции в точках $\gamma_h \cup \Omega_h$ ограничена величиной $1 - \varkappa_2^\nu$, а сумма модулей всех коэффициентов оператора g_h^ν не превосходит $\varkappa_3^\nu$, где $\varkappa_k^\nu$ — положительные постоянные. Если решение задачи (1) $u \in C_{\nu,0}(\overline{\Omega})$, то

$$u - l_h^\nu u - h^2 g_h^\nu f = g_h^\nu \sum_{k=2}^{\nu^*} \frac{2h^{2k}}{(2k)!} \left(\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + \frac{\partial^{2k} u}{\partial y^{2k}} \right) + O(h^\nu),$$

где $\nu^* = [(\nu - 1)/2]$, $O(h^\nu)$ равномерно на γ_h. Операторы рассматриваемого типа построены при $\nu = 1$ в ([4]), при $\nu = 2$ — в ([5]), при $\nu = 3$ — в ([6]), при $\nu = 4$ — в ([7-9]) * и для произвольного ν — в ([10]). В случае $\gamma \in \in C_{2,0}$ операторы l_h^5 и g_h^5 могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов при $\varkappa_1^5 = 2\sqrt{2}$.

2. Пусть $u_h = \varphi$ на γ,

$$u_h = Au_h - h^2 f / 4 \text{ на } \Omega_h, \quad u_h = l_h^\nu u_h + h^2 g_h^\nu f \text{ на } \gamma_h. \tag{2}$$

Обозначим через c_n, $n = 1, 2, \ldots$, постоянные, не зависящие от ρ и h.

Теорема 1. *Если* $\gamma \in C_{m+2,\lambda}$, $\varphi \in C_{m+2,\lambda}(\gamma)$, $f \in C^{2,\lambda}_{m,\lambda}(\Omega)$, $0 \leqslant \leqslant m \leqslant 1$, $0 < \lambda < 1$, $\nu \geqslant 3$, *то*

$$|u_h - u| \leqslant c_1(\rho + h)^\sigma h^2 \text{ на } \Omega_h \cup \gamma_h, \tag{3}$$

где u — *решение задачи* (1), u_h — *решение системы* (2), $\sigma = \max\{m, \lambda\}$, ρ — *расстояние от узла до* γ.

Оценка (3), полученная методом ([11]), уточняет равномерные оценки Н. С. Бахвалова ([2]) порядка h^2 при $f \equiv 0$. В частности, при $\gamma \in C_{6,\lambda}$, $\varphi \in \in C_{6,\lambda}(\gamma)$, $f \in C_{4,\lambda}(\Omega)$, $0 < \lambda < 1$, $\nu = 3$, $\sigma = 1$ оценка (3) является следствием результатов ([10]). Обозначим через $D_h^{q,\tau}$ линейный разностный оператор с шагом h, аппроксимирующий на любой $q + \tau$ раз непрерывно дифференцируемой функции дифференциальный оператор D^q с точностью $O(h^\tau)$; $\Omega_h^{q,\tau}$ — подмножество множества узлов на $\bar{\Omega}$, на котором можно вычислить значение оператора $D_h^{q,\tau}$ по значениям функции на $\Omega_h \cup \gamma_h \cup \gamma$.

Теорема 2. *Пусть* $\gamma \in C_{m+2,\lambda}$, $\varphi \in C_{m+2,\lambda}(\gamma)$, $f \in C^{n,\mu}_{m-\lambda}(\Omega)$, $m \geqslant 0$ $0 < \lambda < 1$, $q \geqslant 1$, $\tau \geqslant 1$, $\nu \geqslant 1$, $\beta = \min\{\tau, 2\}$, $n = \max\{m, q\}$, $\mu = \lambda$ *при* $q \leqslant m$, $\mu > \lambda$ *при* $q = m + 1$, $\mu > 0$ *при* $q > m + 1$; *тогда на* $\Omega_h^{q,\tau}$

$$|D_h^{q,\tau} u_h - D^q u| \leqslant c_2 \left(h^\beta + \frac{h^2}{(\rho + h)^{q-m-\lambda}} + \frac{h^{\nu^*}}{(\rho + h)^q}\right), \tag{4}$$

где u — *решение задачи* (1), u_h — *решение системы* (2).

Очевидно, при $m \geqslant q$, $\nu \geqslant q + 2$, $\tau \geqslant 2$ оценка (4) является равномерной на $\Omega_h^{q,\tau}$ порядка $O(h^2)$, причем при $\nu - 2 = 2[(m - 2)/2] \geqslant q$, $g_h^\nu \equiv 0$ она следует из ([10]). Правая часть неравенства (4) при $f \equiv 0$ не может иметь более высокий порядок по h, чем второй, для любого индивидуального решения задачи (1), не являющегося многочленом по x, y ниже $(q + 5)$-й степени. Это утверждение доказывается методом ([1]). В случае уравнения Лапласа оценка (3), где $\sigma = 1$, и оценка (4), где $m = 1$, $q = 1$, $\tau \geqslant 2$, $\nu = 3$, вытекают при более сильном требовании к решению, чем в теоремах 1 и 2, из работы В. И. Лебедева ([12]). При $f \equiv 0$ справедливость неравенства (4) на подмножестве $\Omega_h' = \Omega_h^{q,\tau} \cap \Omega'$, где Ω' — строго внутренняя подобласть области Ω, с постоянной c_2, зависящей от Ω', следует из результатов В. И. Лебедева ([13]). Брамбл и Хуббард ([14]) получили оценки, аналогичные отмеченным оценкам, вытекающим из ([12], [13]), для более общего эллиптического уравнения второго порядка в предположении достаточно высокой гладкости коэффициентов уравнения и решения.

3. Апостериорную оценку погрешности решения методом сеток задачи (1) предложил Д. Ф. Давиденко ([15]) с применением дважды непрерывно дифференцируемого продолжения сеточной функции на область. В ([15]) не выясняются свойства оценки при $h \to 0$. Ниже даются равномерные апостериорные оценки погрешности с использованием локального кусочно-полиномиального продолжения сеточной функции при соблюдении непрерывности только для первых производных, стремящиеся к нулю как h^2.

---

* Производные от f в выражениях операторов ([7-9]) заменяются разделенными разностями.

Обозначим: $x_i = ih$, $y_j = jh$; R_{ij} — квадрат $\{x_i < x < x_{i+1},\ y_j < y < y_{j+1}\}$; $\widetilde{\Omega}_h^*$ — множество вершин всех квадратов R_{ij}, пересекающихся с Ω; Ω_h^0 — множество узлов из Ω_h, обладающих тем свойством, что все внутренние точки отрезков прямых, соединяющих их с четырьмя узлами, расположенными на расстоянии $\sqrt{2}\,h$, принадлежат Ω; Ω_h^k, $k \geqslant 1$, — множество узлов из $\widetilde{\Omega}_h^*$, расположенных на расстоянии h от Ω_h^{k-1}; $r^*(r_*)$ — радиус максимального круга, границей которого можно коснуться любой точки γ так, чтобы этот круг не имел общих точек с Ω (полностью лежал на Ω). Предположим, что $0 < h \leqslant r^* / \sqrt{2}$, $\Omega_h^0 \neq \phi$. Каждой точке $(x_i, y_j) \in \Omega_h^0$ поставим в соответствие многочлен

$$P_{ij}(x, y) = (1 + \bar{x}_i\delta_x(1 + h^2\delta_y^2 / 6) + \bar{y}_j\delta_y(1 + h^2\delta_x^2 / 6) +$$

$$+ (\bar{x}_i^2\delta_x^2 + \bar{y}_j^2\delta_y^2) / 2 + \bar{x}_i\bar{y}_j\delta_x\delta_y + ((3\bar{x}_i\bar{y}_j^2 - \bar{x}_i^3)\delta_x\delta_y^2 +$$

$$+ (3\bar{x}_i^2\bar{y}_j - \bar{y}_j^3)\delta_y\delta_x^2) / 6)u_h(x_i, y_j) +$$

$$+ (\bar{x}_i(\bar{x}_i^2 - h^2)\delta_x + \bar{y}_j(\bar{y}_j^2 - h^2)\delta_y)f(x_i, y_i) / 6,$$

где $\bar{x}_i = x - x_i$, $\bar{y}_j = y - y_j$, $\delta_x f(x, y) = (f(x + h, y) - f(x - h, y)) / 2h$, $\delta_x^2 f(x, y) = (f(x - h, y) - 2f(x, y) + f(x + h, y)) / h^2$, δ_y и δ_y^2 определяются аналогично. Многочлен P_{ij}, соответствующий точке $(x_i, y_j) \in \Omega_h^k$, $k \geqslant 1$, задаем равным среднему арифметическому многочленов, соответствующих всем точкам из Ω_h^{k-1}, расположенным на расстоянии h от (x_i, y_j), причем если $(x_i, y_j) \in \gamma \cup \gamma_h \cup \Omega_h$, то свободный член изменяем так, чтобы $P_{ij}(x_i, y_j) = u_h(x_i, y_j)$. Определим функцию $\tilde{u}_h$ на $\overline{\Omega}$ следующим образом:

$$\tilde{u}_h(x, y) = \sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1} P_{i+\mu, j+\nu}(x, y)\,\psi\left(\frac{\bar{x}_{i+\mu}}{h}\right)\psi\left(\frac{\bar{y}_{j+\nu}}{h}\right), \quad (x, y) \in \bar{\omega}_{ij},$$

где $\omega_{ij} = \Omega \cap R_{ij}$, $\psi(t) = 1 - 2t^2$ при $|t| \leqslant 1/2$, $\psi(t) = 2(1 - |t|)^2$ при $|t| > 1/2$.

Пусть $\gamma \in C_{2,0}$; $2d$ — ширина минимальной полосы, содержащей Ω; $h_* = r_* / ([r_* / h] + 1)$; $\Omega(\rho)$ — множество точек Ω, удаленных от γ больше чем на ρ; $\sigma_0 = \Omega(r_*)$; $\sigma_\nu = \Omega(r_* - \nu h_*) \setminus \Omega(r_* - (\nu - 1)h_*)$, $\nu \geqslant 1$;

$$F_\mu = \sup_{(x,y)\in\sigma_\mu} \operatorname{vrai} |f - \Delta\tilde{u}_h|, \quad F = \sup_{(x,y)\in\Omega} \operatorname{vrai} |f - \Delta\tilde{u}_h|;$$

$k_* = \inf_\gamma k(s)$, где $k(s)$ — кривизна γ в текущей точке со знаком плюс в точках выпуклости; $Z^* = z(r_*)$; $z(t)$ — решение задачи Коши

$$z_{tt}'' + a(t)z_t' = b(t), \ 0 \leqslant t \leqslant r_*, \quad z(0) = z_t'(0) = 0,$$

где $a(t) = 1 / (1 / k_* - r_* + \mu h_*)$, $b(t) = F_\mu$, $(\mu - 1)h_* \leqslant t < \mu h_*$, которое вычисляется с шагом h_* в элементарных функциях.

Теорема 3. *Если* $\gamma \in C_{2,\lambda}$, $\varphi \in C_{2,\lambda}(\gamma)$, $f \in C^{0}_{2,\lambda}(\Omega)$, $0 < \lambda < 1$, $0 < h \leqslant r^* / \sqrt{2}$, $\Omega_h^0 \neq \phi$, $\nu \geqslant 3$, *то*

$$\max_{\Omega_h \cup \gamma_h} |u_h - u| \leqslant \max_{\overline{\Omega}} |\tilde{u}_h - u| \leqslant$$

$$\leqslant \max_\gamma |\tilde{u}_h - \varphi| + Z^* + F_0(d^2 - r_*^2)/2 \leqslant c_3 h^2, \tag{5}$$

где u — *решение задачи* (1), u_h — *решение системы* (2).

Теорема 4. *Пусть* $\gamma \in C_{4,\lambda}$, $\varphi \in C_{4,\lambda}(\gamma)$, $f \in C_{2,\lambda}(\Omega)$, $0 < \lambda < 1$, $0 < h \leqslant r^* / \sqrt{2}$, $\Omega_h^0 \neq \phi$, $\nu \geqslant 4$; *тогда*

$$\max_{\Omega_h \cup \gamma_h} |u_h - u| \leqslant \max_{\bar{\Omega}} |\tilde{u}_h - u| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\gamma} |\tilde{u}_h - \varphi| + Fd^2/2 \leqslant c_4 h^2, \qquad (6)$$

где u — *решение задачи* (1), u_h — *решение системы* (2).

Замечания. 1) Теоремы 3 и 4 остаются в силе, если решение задачи (2) вычислено с погрешностью $O(h^4)$, а в качестве F_μ берется существенный максимум $|f - \Delta\tilde{u}_h|$ по объединению всех множеств ω_{ij}, пересекающихся с σ_μ. 2) В ([16]) предложены оценки погрешности других типов, выражающиеся непосредственно через исходные данные.

Поступило
14 XI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. А. Волков, Матем. заметки, 4, № 6 (1968). [2] Н. С. Бахвалов, Вестн. МГУ, сер. матем., № 4 (1959). [3] Е. А. Волков, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 9, № 3 (1969). [4] S. A. Gerschgorin, Zs. angew. Math. u. Mech., 10, № 4 (1930). [5] L. Collatz, ibid., 13, № 1 (1933). [6] Ш. Е. Микеладзе, Изв. АН СССР, сер. матем., 5, № 1 (1941). [7] I. Albrecht, W. Uhlmann, Zs. angew. Math. u. Mech., 37, № 5/6 (1957). [8] Д. Ф. Давиденко, Укр. матем. журн., 13, № 4 (1961). [9] J. H. Bramble, B. E. Hubbard, Num. Math., 4, № 4 (1962). [10] Е. А. Волков, Вычислительная математика, сборн. 1, 62, 1957. [11] Е. А. Волков, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 1, № 4 (1961). [12] В. И. Лебедев, ДАН, 128, № 4 (1959). [13] В. И. Лебедев, ДАН, 132, № 5 (1960). [14] J. H. Bramle, B. E. Hubbard, Contributions to Diff. Equations, 3 (1964). [15] Д. Ф. Давиденко, ДАН, 138, № 2 (1961). [16] Е. А. Волков, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 74 (1966); Сборн. Численные методы решения задач математической физики, «Наука», 1966; Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 6, № 3 (1966); Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 96 (1968); 105 (1969).