**Доклады Академии наук СССР**
**1970. Том 192, № 4**

УДК 539.377+539.434 *ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ*

А. С. ВОЛЬМИР, А. Т. ПОНОМАРЕВ

# УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ТЕПЛОВОМ УДАРЕ

*(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 21 XI 1969)*

Пусть тонкая круговая цилиндрическая оболочка конечной длины подвергается действию осесимметричного теплового импульса в некоторой зоне, расположенной у одного из торцов.

При распространении теплового потока вдоль конструкции часть длины оболочки будет подвергаться динамическому сжатию. Особенно сильным этот эффект будет в случае теплового удара. При известных условиях в сжатой зоне оболочки наступит выпучивание, сопровождающееся прощелкиванием; это явление является опасным для конструкции. Для описания поведения оболочки в основных уравнениях необходимо учесть силы инерции, соответствующие не только прогибу, но и перемещениям в срединной поверхности. Так как подобная задача оказывается весьма сложной, будем условно считать, что изменение термоупругой деформации по длине оболочки не зависит от прогиба и определяется из решения соответствующей одномерной задачи [1]. Что же касается явления выпучивания, то примем, что образующиеся при этом прогибы сравнимы с толщиной оболочки и находятся из решения геометрически нелинейной задачи.

Выпишем систему дифференциальных уравнений, описывающих перемещения точек срединной поверхности вдоль длины оболочки [1]

$$\theta_{,t} - \varkappa\theta_{,xx} + \beta' u_{,xt} = 0, \tag{1}$$

$$u_{,xx} - \frac{1}{c^2} u_{,tt} - \alpha\theta_{,x} = 0 \tag{2}$$

и большие прогибы [2]

$$\frac{D}{h}\nabla^2\nabla^2(w - w_0) = L(w, \Phi) + \frac{1}{R}\Phi_{,xx} - \frac{\gamma}{g} w_{,tt}, \tag{3}$$

$$\frac{1}{E}\nabla^2\nabla^2\Phi = -\frac{1}{2}[L(w, w) - L(w_0, w_0)] - \frac{1}{R}(w - w_0)_{,xx}. \tag{4}$$

Здесь $\theta$ — температура; $\varkappa$ — коэффициент температуропроводности; $\beta'$ — коэффициент, учитывающий обратный эффект упругой деформации; $x, y$ — координаты, отсчитываемые вдоль образующей и по дуге; $t$ — время; $u$ — перемещения точек срединной поверхности вдоль оси; $\alpha$ — коэффициент линейного расширения; $c$ — скорость распространения продольной упругой волны в материале; $w$ — полный прогиб; $w_0$ — начальный прогиб; $\Phi$ — функция напряжений в срединной поверхности; $R$ — радиус кривизны срединной поверхности; $h$ — толщина оболочки; $D$ — цилиндрическая жесткость; $\gamma$ — удельный вес материала. Индексы после запятой обозначают дифференцирование по соответствующей переменной; $\nabla^2$ — оператор Лапласа; $L$ — известный билинейный оператор.

Примем, что оболочка обладает начальной погибью. Полный и начальный прогибы аппроксимируем с помощью выражения типа $w = f(\sin\alpha_0 x \sin\beta_0 y + \psi\sin^2\alpha_0 x + \varphi)$, $\alpha_0 = m\pi / l$; $\beta_0 = n / R$; $m$ — число полуволн вдоль образующей оболочки; $n$ — число волн по окружности; $l$ — длина оболочки. Подставим это выражение в правую часть уравнения (4) и после интегрирования найдем функцию Ф. При этом в выражение для Ф входит член $(-py^2/2)$, где $p = p(t)$ — интенсивность сжимающих усилий в выбранном сечении оболочки, определяемая по формуле $p = E(\partial u/\partial x - \alpha\theta)$. Для нахождения зависимости между параметрами прогиба оболочки и изменяющимися во времени сжимающими усилиями воспользуемся применительно к уравнению (3) методом Бубнова — Галёркина. В результате приходим к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка относительно стрелы прогиба $f$.

Будем исследовать случай, когда происходит резкий местный нагрев одного из торцов оболочки; остальную поверхность примем теплоизолированной. Решение задачи сводится к интегрированию следующей системы разрешающих уравнений:

$$\theta^*_{,\tau} - d\theta^*_{,x^*x^*} + \alpha\beta' u^*_{,x^*\tau} = 0, \tag{5}$$

$$u^*_{,x^*x^*} - u^*_{,\tau\tau} - \theta^*_{,x^*} = 0, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{,\tau\tau} - s\Big\{\Big[p^* - \frac{1}{16}\frac{(1+\rho^2)}{\rho^2}\eta(\zeta^2-\zeta_0^2)\Big]\zeta - \frac{1}{12(1-\mu^2)}\frac{(1+\rho^2)^2}{\rho^2}\eta(\zeta+\zeta_0) - \\ - \psi^2\eta\rho^2\zeta(\zeta^2-\zeta_0^2)\Big[\frac{1}{(1+\rho^2)^2} + \frac{1}{(1+9\rho^2)^2}\Big] + \frac{1}{4\rho^2}\psi\zeta(\zeta-\zeta_0)\Big[1 + \frac{4\rho^2}{(1+\rho^2)^2}\Big] + \\ + \psi\frac{\rho^2}{(1+\rho^2)^2}(\zeta^2-\zeta_0^2) - \frac{\rho^2}{\eta(1+\rho^2)^2}(\zeta-\zeta_0)\Big\} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь введены безразмерные параметры: $x^* = x/l$, $\tau = tc/l$, $\theta^* = \theta\alpha$, $u^* = a/l$, $v^* = v/i$, $d = \varkappa/cl$, $\lambda = l/i$, $p^* = pR/Eh$, $\zeta = f/h$, $\zeta_0 = f_0/h$, $\eta = n^2h/R$, $\rho = m\pi R/nl$, $s = (l/R)^2\eta\rho^2$, где $i = R/\sqrt{2}$ — радиус инерции сечения оболочки, $\lambda$ — общая гибкость конструкции. Значение $\psi$ условно принимаем по решению статической задачи для идеальной оболочки.

Решение уравнений (5) и (6) было получено в замкнутой форме последовательным применением к ним интегральных преобразований Фурье и Лапласа при следующих граничных и начальных условиях:

$$\theta^*_{,x^*} = u^* = 0 \text{ при } x^* = 0 \text{ и } x^* = 1;$$

$$u^* = u^*_{,\tau} = 0; \quad \theta^* = \frac{Qg}{c_v\gamma}\delta(x^*) \text{ для } \tau = 0,$$

где $Q$ — количество подведенной тепловой энергии; $c_v$ — удельная теплоемкость материала; $\delta(x^*)$ — функция Дирака.

Уравнение (7) было проинтегрировано методом Рунге — Кутта с помощью цифровой машины БЭСМ-2М, исходя из начальных условий $\zeta - \zeta_0 = \zeta_{,\tau} = 0$.

В процессе решения задачи определялись коэффициент динамичности, представляющий собой отношение величины максимального сжимающего усилия к верхнему критическому значению $p^*/p_в^*$, и число волн, при котором наступает бурный процесс выпучивания.

Результаты вычислений представлены на рис. 1 в виде кривых, характеризующих темп нарастания прогиба $\zeta$ в оболочке в сечении $x = l/2$ в зависимости от безразмерного времени $\tau$ для различных параметров теплового импульса $\theta$. Они относятся к оболочке с отношением $R/h = 300$, амплитудой начальной погиби $\zeta_0 = 0{,}001$ и параметром волнообразования $\rho = 3$; $L/R = 3{,}75$. В качестве критического времени условно принимался момент $\tau_{кр}$, соответствующий фронту бурного нарастания прогибов. Как видим, в случае $\theta = 5$ наиболее вероятная форма выпучивания оболочки соответствует числу волн $n = 54$, причем критический параметр времени равен $\tau \approx 0{,}09$; аналогичные результаты приведены на графике для значений $\theta = 1$ и $\theta = 0{,}3$.

Таким образом, в данной работе предлагается математическая модель для описания процесса выпучивания цилиндрической оболочки при теп-

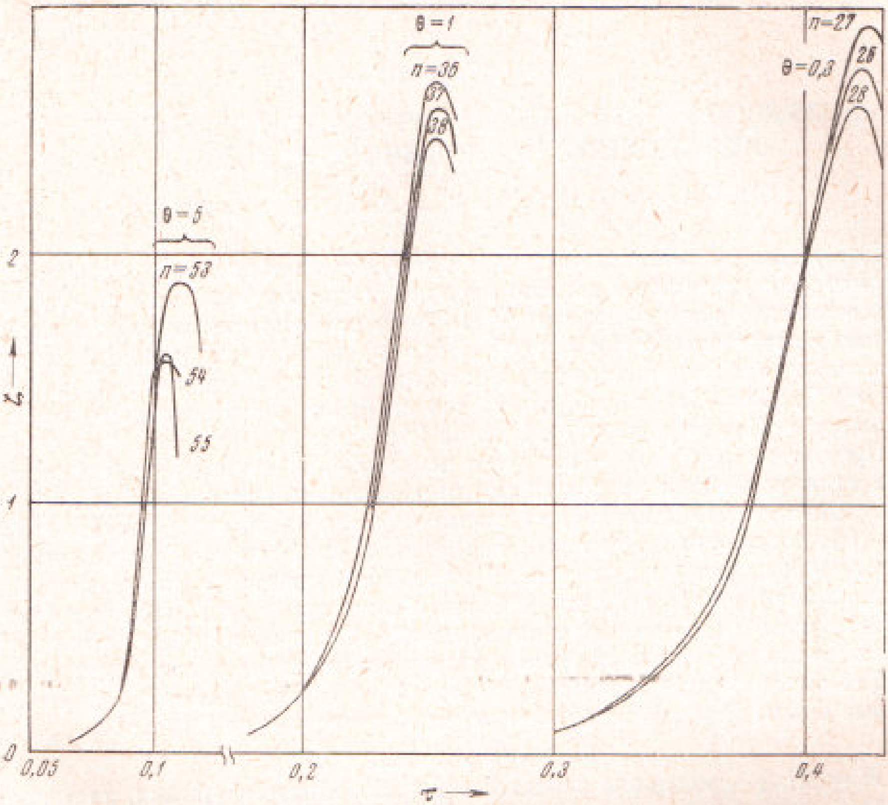


Рис. 1

ловом ударе. Вычисления показали, что эффект динамичности особенно резко сказывается для более тонких оболочек, при значительном отношении $R/h$.

Военно-воздушная инженерная академия
им. Н. Е. Жуковского
Москва

Поступило
3 XI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. С. Вольмир, Устойчивость деформируемых систем, «Наука», М., 1967.
[2] I. N. Sneddon, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, A65, 2 (1959).