Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 6

ФИЗИКА

Л. Б. ГРИГОРЬЕВА

ХРОНОМЕТРИЧЕСКИ ИНВАРИАНТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КЛАССИФИКАЦИИ ПОЛЕЙ ТЯГОТЕНИЯ ПЕТРОВА

(Представлено академиком Л. И. Седовым 12 XII 1969)

Целью данной работы является хронометрически инвариантная формулировка алгебраической классификации полей тяготения Петрова. Выражение алгебраических характеристик полей тяготения через хронометрические инварианты позволяет в ряде случаев дать их физическую интерпретацию в данной системе отсчета, а также получить хронометрически инвариантные условия, характеризующие поля тяготения разных типов. Рассмотрение будет производиться в орторепере, выбранном в фиксированной точке пространства — времени V_4 общей теории относительности.

Четырехмерные системы координат, принадлежащие к одной и той же системе отсчета, по определению, связаны друг с другом преобразованиями вида [1]

$$\begin{aligned} &\tilde{x}^0 = \tilde{x}^0(x^0, x^1, x^2, x^3), && \text{(а)} \\ &\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^1, x^2, x^3), && \text{(б)} \\ &\partial\tilde{x}^i / \partial x^0 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Условимся, что греческие индексы будут принимать значения 0, 1, 2, 3, латинские 1, 2, 3; пространственные координаты будем обозначать x^1, x^2, x^3, временную x^0 ($x^0 = ct$, где c — фундаментальная скорость). При выбранной системе отсчета физически преимущественными являются трехмерные тензорные величины, инвариантные по отношению к (1а), т. е. хронометрически инвариантные (х.и.). Трехмерное пространство данной системы отсчета характеризуется [1] тремя механическими х.и. величинами: F^i (вектор гравитационно инерциальной силы), A_{ik} (тензор угловой скорости вращения относительно локально сопутствующей геодезической системы координат), D_{ik} (тензор скоростей деформации) и одной геометрической (тензор кривизны трехмерного пространства). В произвольной фиксированной системе отсчета 20 существенных компонент тензора конформной кривизны Вейля $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ можно разбить на 3 х.и. трехмерных тензора (х.и. компоненты тензора Вейля) [2]:

$$\tilde{X}^{ij} = -c^2 \frac{G_{0\cdot 0\cdot}^{\cdot i \cdot j}}{g_{00}}, \quad \tilde{Y}^{ijk} = -\frac{cC_{0\cdots}^{\cdot ijk}}{\sqrt{g_{00}}}, \quad Z^{iklj} = c^2 C^{iklj}, \tag{2}$$

обладающих следующими свойствами:

$$\tilde{X}_{ij} = \tilde{X}_{ji}, \quad \tilde{X}_k^k = 0, \quad \tilde{Y}_{[ijk]} = 0, \quad \tilde{Y}_{ijk} = -Y_{ikj}. \tag{3}$$

Здесь $\tilde{X}_k{}^k = h^{ik} X_{ik}$, где h_{ik} — х.и. трехмерный метричный тензор ($h_{ik} = -g_{ik} - g_{0c} g_{0k} / g_{00}$). Тензор Z_{iklj} обладает всеми алгебраическими свойствами тензора кривизны.

В орторепере равенства (2) принимают вид:

$$\tilde{X}_{ij} = -c^2 C_{0i0j}, \quad \tilde{Y}_{ijk} = -cC_{0ijk}, \quad Z_{iklj} = c^2 C_{iklj}. \tag{4}$$

Выражая компоненты тензора Вейля через х.и. величины, мы получим для них в орторепере

$$C_{i0j0} = -\frac{1}{c^2} X_{ij} - \frac{\varkappa}{2c^2} U_{ij} + \frac{\varkappa\rho}{6} h_{ij} + \frac{\varkappa c^2}{3} U h_{ij}, \tag{5}$$

$$C_{i0jk} = \frac{1}{c} Y_{ijk} - \frac{\varkappa}{2c}(h_{ik} J_j - h_{ij} J_k), \tag{6}$$

$$C_{iklj} = \frac{1}{c^2} Z_{iklj} - \frac{\varkappa}{2c^2}(h_{ij}U_{kl} - h_{il}U_{kj} + h_{kl}U_{ij} - h_{kj}U_{il}) - $$
$$- {}^1/_3\varkappa(\rho - U/c^2)(h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}), \tag{7}$$

где X_{ij}, Y_{ijk}, Z_{iklj} — х.и. компоненты тензора кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, определяемые аналогично (2) и выражающиеся через х.и. характеристики пространства отсчета (F_i, A_{ik}, D_{jk} и трехмерный тензор кривизны) и их первые производные ([2]); $\rho = T_{00} / g_{00}$ — плотность массы; $J^i = cT_0{}^i / \sqrt{g_{00}}$ — вектор плотности потока массы (импульса), $U^{ij} = c^2 T^{ij}$ — тензор плотности потока импульса (тензор напряжений) ([1]).

Записывая уравнения $C_{\alpha\beta} = 0$ в орторепере, учитывая соотношения (4) и вводя трехмерные матрицы $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$:

$$\widetilde{x} \equiv \|\widetilde{x}_{ik}\| \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{c^2}\|\widetilde{X}_{ik}\|, \quad \widetilde{y} \equiv \|\widetilde{y}_{ik}\| \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2c}\|\varepsilon_{imn}\widetilde{Y}_{kmn}\| \tag{8}$$

(ε_{imn} — трехмерный дискриминантный тензор), можно представить шестимерную матрицу $\|C_{ab}\|$ в следующем виде *

$$\|C_{ab}\| = \begin{Vmatrix} \widetilde{x} & \widetilde{y} \\ \widetilde{y} & -\widetilde{x} \end{Vmatrix}. \tag{9}$$

При этом имеют место соотношения:

$$\widetilde{x}_{11} + \widetilde{x}_{22} + \widetilde{x}_{33} = 0, \quad \widetilde{y}_{11} + \widetilde{y}_{22} + \widetilde{y}_{33} = 0. \tag{10}$$

Составим λ-матрицу

$$\|C_{ab} - \lambda g_{ab}\| = \begin{Vmatrix} \widetilde{x} + \lambda\varepsilon & \widetilde{y} \\ \widetilde{y} & -\widetilde{x} - \lambda\varepsilon \end{Vmatrix},$$

где ε — трехмерная единичная матрица, и, пользуясь элементарными преобразованиями, приведем ее к виду:

$$\begin{Vmatrix} \widetilde{x} + i\widetilde{y} + \lambda\varepsilon & 0 \\ 0 & \widetilde{x} - i\widetilde{y} + \lambda\varepsilon \end{Vmatrix} \equiv \begin{Vmatrix} Q(\lambda) & 0 \\ 0 & \overline{Q}(\lambda) \end{Vmatrix}. \tag{11}$$

Исходная λ-матрица может иметь одну из следующих характеристик ([3]):

$$1.\ [111, \overline{111}]. \quad 2.\ [21, \overline{21}]. \quad 3.\ [3, \overline{3}]. \tag{12}$$

Пользуясь полученным А. З. Петровым ([3]) каноническим видом матрицы $\|R_{ab}\|$ в неголономном орторепере для каждого из трех типов T_i ($i = 1, 2, 3$), выразим матрицу $\|C_{ab}\|$ через компоненты х.и. тензоров $\widetilde{X}_{ij}$ и $\widetilde{Y}_{ij}{}^k$.

1. Тип T_1

$$\|C_{ab}\| = \begin{Vmatrix} \widetilde{x} & \widetilde{y} \\ \widetilde{y} & -\widetilde{x} \end{Vmatrix}, \quad \widetilde{x} = \begin{Vmatrix} \widetilde{x}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{x}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{x}_{33} \end{Vmatrix}, \quad \widetilde{y} = \begin{Vmatrix} \widetilde{y}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{y}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{y}_{33} \end{Vmatrix}, \tag{13}$$

где

$$\widetilde{x}_{11} + \widetilde{x}_{22} + \widetilde{x}_{33} = 0, \quad \widetilde{y}_{11} + \widetilde{y}_{22} + \widetilde{y}_{33} = 0. \tag{14}$$

Можно показать, что в орторепере выполняются условия:

$$\widetilde{y}_{11} = \frac{1}{c}\widetilde{Y}_{123} = \frac{1}{c}Y_{123}, \quad \widetilde{y}_{22} = \frac{1}{c}\widetilde{Y}_{231} = \frac{1}{c}Y_{231}, \quad \widetilde{y}_{33} = \frac{1}{c}\widetilde{Y}_{312} = \frac{1}{c}Y_{312}. \tag{15}$$

Тогда стационарные кривизны $\widetilde{\lambda}_s$ ($s = 1, 2, 3$) для пространств T_1 имеют вид:

$$\begin{aligned} \widetilde{\lambda}_1 &= -\frac{1}{c^2}X_{11} + \frac{i}{c}Y_{123} - \frac{\varkappa}{2c^2}U_{11} + \frac{\varkappa\rho}{6} + \frac{\varkappa U}{3c^2}, \\ \widetilde{\lambda}_2 &= -\frac{1}{c^2}X_{22} + \frac{i}{c}Y_{231} - \frac{\varkappa}{2c^2}U_{22} + \frac{\varkappa\rho}{6} + \frac{\varkappa U}{3c^2}, \\ \widetilde{\lambda}_3 &= -\frac{1}{c^2}X_{33} + \frac{i}{c}Y_{312} - \frac{\varkappa}{2c^2}U_{33} + \frac{\varkappa\rho}{6} + \frac{\varkappa U}{3c^2}. \end{aligned} \tag{16}$$

* Связь шестимерной матрицы $\|R_{ab}\|$ тензора кривизны с х.и. величинами впервые и в другой форме была указана Г. А. Соколиком, исходившим при этом из теории тензорных представлений линейных унимодулярных групп.

Для пространств типа D $(\tilde{\lambda}_2 = \tilde{\lambda}_3)$ имеем: $X_{22} - X_{33} = {}^1/_2\varkappa(U_{33} - U_{22})$. $Y_{231} = Y_{312}$; для пространств типа O $(\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 = \tilde{\lambda}_3)$: $X_{11} + {}^1/_2\varkappa U_{11} = X_{22} + {}^1/_2\varkappa U_{22} = X_{33} + {}^1/_2\varkappa U_{33}$, $Y_{123} = Y_{231} = Y_{312} = 0$.

2. Тип $\tilde{T}_2$

$$\|C_{ab}\| = \left\| \begin{matrix} \tilde{x} & \tilde{y} \\ \tilde{y} & -\tilde{x} \end{matrix} \right\|, \quad \tilde{x} = \left\| \begin{matrix} \tilde{x}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{x}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{x}_{33} \end{matrix} \right\|, \quad \tilde{y} = \left\| \begin{matrix} \tilde{y}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{y}_{22} & 1 \\ 0 & 1 & \tilde{y}_{22} \end{matrix} \right\|; \tag{17}$$

причем

$$\tilde{x}_{11} + \tilde{x}_{22} + \tilde{x}_{33} = 0, \quad \tilde{y}_{11} + 2\tilde{y}_{22} = 0, \quad \tilde{x}_{22} - \tilde{x}_{33} = 2; \tag{18}$$

$$\tilde{\lambda}_1 = -\frac{1}{c^2} X_{11} + \frac{i}{c} Y_{123} - \frac{\varkappa}{2c^2} U_{11} + \frac{\varkappa\rho}{6} + \frac{\varkappa U}{3c^2},$$

$$\tilde{\lambda}_2 = -\frac{1}{c^2} X_{22} - 1 + \frac{i}{c} Y_{231} - \frac{\varkappa}{2c^2} U_{22} + \frac{\varkappa\rho}{6} + \frac{\varkappa U}{3c^2} = -\frac{1}{c^2} X_{33} + 1 + \frac{i}{c} Y_{231} - \frac{\varkappa}{2c^2} U_{22} + \frac{\varkappa\rho}{6} + \frac{\varkappa U}{3c^2}. \tag{19}$$

Для пространств типа N $(\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2)$ в орторепере справедливы соотношения: $X_{22} - c^2 + \varkappa U_{22}/2 = X_{33} + c^2 + \varkappa U_{22}/2 = X_{11} + \varkappa U_{11}/2$, $Y_{123} = Y_{231} = Y_{312} = 0$.

3. Тип $\tilde{T}_3$.

$$\|C_{ab}\| = \left\| \begin{matrix} \tilde{x} & \tilde{y} \\ \tilde{y} & -\tilde{x} \end{matrix} \right\|, \quad \tilde{x} = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad \tilde{y} = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{20}$$

Из формул (13), (17) и (20) следует, что условие $\tilde{Y}_{ijk} = 0$ может выполняться только для полей типа $\tilde{T}_1$. Отсюда можно сделать вывод, что поля тяготения, для которых в некоторой системе отсчета выполняется условие $\tilde{Y}_{ijk} = 0$, могут принадлежать только к типу $\tilde{T}_1$ с вещественными стационарными кривизнами.

Рассмотрим пример метрик типа $\tilde{T}_1$, удовлетворяющих условию $\tilde{Y}_{ijk} = 0$. Из выражения для $\tilde{Y}_{ijk}$ (2)

$$\tilde{Y}_{ijk} = {}^*\nabla_j (D_{ik} + A_{ik}) - {}^*\nabla_i (D_{jk} + A_{jk}) + \frac{2}{c^2} A_{ji} F_k - \frac{\varkappa}{2} (h_{ik} J_j - h_{ij} J_k) \tag{21}$$

и уравнений Эйнштейна в х.и. форме (1) следует, что х.и. тензор $\tilde{Y}_{ijk}$ обращается в нуль в системах отсчета, в которых выполняется любое из следующих условий:

$${}^*\nabla_j D_{ik} = 0, \quad {}^*\nabla_j A_{ik} = 0, \quad F_i = 0; \tag{22}$$

$${}^*\nabla_j D_{ik} = 0, \quad A_{ik} = 0, \tag{23}$$

где ${}^*\nabla_i$ — символ х.и. пространственно ковариантного дифференцирования. Если выполняется более сильное условие $A_{ik} = 0$, $D_{ik} = 0$, то мы приходим к системе отсчета, которая ускоренно движется, не вращаясь и не деформируясь при этом*. Условие $A_{ik} = 0$ позволяет в данной системе отсчета выбрать временну́ю координату x^0 так, чтобы имело место условие $g_{0i} = 0$ (1). Условие $D_{ik} = 0$ приводит к стационарности х.и. трехмерного тензора h_{ik} (1). Так как в данной системе отсчета $h_{ik} = -g_{ik}$, то трехмерную метрику g_{ik} можно преобразовать к диагональному виду. Таким образом, метрику ds^2 в данной системе отсчета можно записать в форме

$$ds^2 = g_{00}(x^0, x^1, x^2, x^3)\, dx^{0^2} + g_{11} dx^{1^2} + g_{22} dx^{2^2} + g_{33} dx^{3^2}, \tag{24}$$

где $g_{ii} = g_{ii}(x^1, x^2, x^3)$.

---

* Здесь, говоря об ускоренном движении, вращении и деформации системы отсчета, мы имеем в виду соответствующие движения трехмерного пространства данной системы отсчета относительно локально сопутствующей ей геодезической системы координат.

Рассмотрим два частных случая.

1. $g_{00} = g_{00}(x^0)$, тогда $F_i = 0$ (5), т. е. система отсчета свободно падает. Можно показать, что в этом случае пространство Эйнштейна с метрикой (24) является плоским пространством — временем (3). Таким образом, в пространстве Эйнштейна ($R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}$) не могут одновременно выполняться 3 х.и. условия: $F_i = 0$, $A_{ik} = 0$, $D_{ik} = 0$, за исключением случая плоского пространства — времени.

2. $g_{00} = g_{00}(x^1, x^2, x^3)$, т. е. $^*\partial F_i / \partial t = 0$ (5) (стационарное силовое поле). В этом случае метрика (24) представляет собой общий вид метрики статического пространства $[g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3),\ g_{0i} = 0]$ (3). Иными словами, всякое статическое пространство — время V_4 допускает систему отсчета, в которой выполняются условия $^*\partial F_i / \partial t = 0$, $A_{ik} = 0$, $D_{ik} = 0$.

Из рассмотрения канонических форм (13), (17) и (20), определения (8) матрицы $\|\tilde{y}_{ik}\|$ и условия (15) следует, что V_4 *имеет вещественные стационарные кривизны в том и только в том случае, если в выбранном орторепере данной точки выполняется условие:*

$$Y_{123} = Y_{231} = Y_{312} = 0. \tag{25}$$

В вакууме тензор Вейля совпадает с тензором кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, и мы можем провести классификацию пустых пространств, используя λ-матрицу

$$\|R_{ab} - \lambda g_{ab}\| = \begin{Vmatrix} x + \lambda\varepsilon & y \\ y & -x - \lambda\varepsilon \end{Vmatrix}, \tag{26}$$

где

$$x \equiv \|x_{ik}\| \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{c^2}\|X_{ik}\|, \quad y \equiv \|y_{ik}\| \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2c}\|\varepsilon_{imn}\bar{\bar{Y}}_{kmn}\|. \tag{27}$$

Приводя λ-матрицу элементарными преобразованиями к квазидиагональному виду (11), получаем три типа полей тяготения Петрова, определяемых характеристиками (12). Для канонического вида матрицы $\|R_{ab}\|$ получаем выражения, аналогичные выражениям для канонического вида матрицы $\|C_{ab}\|$ в орторепере (см. (13), (17) и (20)), где вместо матриц $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ будут фигурировать матрицы x и y. Так как в орторепере выполняются условия (15), то *мнимые части стационарных кривизн* $\tilde{\lambda}_s$ *и* λ_s *совпадают*, т. е. *наличие материи приводит к дополнительному вкладу только в вещественные части стационарных кривизн*. Для пространств типа T_1 и T_2 имеем

$$\tilde{\lambda}_s = \lambda_s - \frac{\varkappa}{2c^2}U_{ss} + \frac{\varkappa\rho}{6} + \frac{\varkappa U}{3c^2}. \tag{28}$$

Из канонических форм матрицы $\|R_{ab}\|$ для всех трех типов следует, что *пространства Эйнштейна, для которых в некоторой системе отсчета выполняется условие* $Y_{ijk} = 0$, *могут принадлежать только к типу* T_1 *с вещественными стационарными кривизнами.*

Автор выражает благодарность В. Д. Захарову за руководство данной работой и связанные с нею многочисленные советы и указания.

Поступило
11 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Л. Зельманов, Тр. VI совещ. по вопросам космогонии, Изд. АН СССР, 1959, стр. 144. [2] В. Д. Захаров, Сборн. Проблемы теории гравитации и элементарных частиц, 1969. [3] А. З. Петров, Пространства Эйнштейна, М., 1961. [4] Г. А. Соколик, К. П. Станюкевич, Тезисы докл. V международной конференции по гравитации, Тбилиси, 1968, стр. 63. [5] А. Л. Зельманов, Кандидатская диссертация, МГУ, 1944.