Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 6

УДК 513.836 *МАТЕМАТИКА*

М. Л. ГРОМОВ

ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЛОЖЕНИЯ И ПОГРУЖЕНИЯ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 16 XII 1969)

I. Введение. В настоящей заметке формулируются теоремы, описывающие структуру пространств изометрических погружений одного псевдориманова (в частности, риманова) многообразия в другое. Эти теоремы обобщают и уточняют результаты Нэша и Куйпера об изометрических C^1-погружениях, теоремы Нэша об изометрических вложениях классов C^∞, C^a (аналитичность), локальную теорему Жане — Картана — Бурстина, а также результаты работы ([5]), которая, в частности, содержит обзор вопроса и литературы. Из теорем п. III настоящей работы следуют иммерсионные теоремы Смейла — Хирша и их обобщения (см. ([2])). Предложения п. VII примыкают к работе ([4]).

II. Вспомогательные понятия. Если η, θ — вещественные векторные пучки над A со слоями η_a, θ_a, $a \in A$, то гомоморфизмом (мономорфизмом) $\eta \to \theta$ называется непрерывное семейство линейных (линейных взаимно однозначных) отображений $\eta_a \to \theta_a$. Если ξ — пучок над B и f: $A \to B$ — непрерывное отображение, то индуцированный над A пучок обозначается через $f^*(\xi)$. Морфизмом (инъекцией) пучка η над A в пучок ξ над B называется пара (f, φ), где f: $A \to B$ — непрерывное отображение, а φ: $\eta \to f^*(\xi)$ — гомоморфизм (мономорфизм). Для морфизма $\psi = (f, \varphi)$ полагаем $|\psi| = \varphi$. Формой g в пучке η над A называется непрерывное семейство квадратичных форм g_a, $a \in A$, в слоях η_a. Если форма g невырождена, т. е. приводима в каждом слое к виду $\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2$ с $n = \dim \eta$, то она называется метрикой; через pos g обозначается ранг k положительной части, а через neg g — ранг $n - k$ отрицательной части метрики g. Невырожденная форма g с neg $g = 0$ называется положительной.

Далее через W обозначается многообразие с касательным пучком ω и метрикой h в ω (т. е. W — это псевдориманово многообразие с метрикой h). Если f: $A \to W$ — непрерывное отображение, то через $f^*(h)$ обозначаем индуцированную в пучке $f^*(\omega)$ метрику; для гомоморфизма φ пучка η над A в пучок $f^*(\omega)$ через $g(\varphi)$ обозначаем индуцированную им (из метрики $f^*(h)$) в η форму, а для морфизма $\psi = (f, \varphi)$: $\eta \to \omega$ полагаем $g(\psi) = g(\varphi)$.

В дальнейшем через V обозначается многообразие с распределением α (распределением α на V называется подпучок α касательного пучка $\tau(V)$, т. е. поле касательных плоскостей на V) и метрикой g в α. Гомоморфизм φ пучка α в индуцированный при непрерывном отображении f: $V \to W$ пучок $f^*(\omega)$ называется изометрическим, если $g(\varphi) = g$. Аналогично морфизм ψ: $\alpha \to \omega$ называется изометрическим, если $g(\psi) = g$. Если f: $V \to W$ — гладкое отображение, то через δ_f: $\alpha \to \omega$ обозначим сужение на α дифференциала d_f: $\tau(V) \to \omega$. Отображение f: $V \to W$ класса C^r, $r = 1, 2, \ldots, \infty$, a, назовем C^r-изометрией, если морфизм δ_f изометричен. C^1-отображение f: $V \to W$ назовем коротким, если форма $g - g(\delta_f)$ положительна.

В данной работе многообразия, пучки и метрики предполагаются C^∞-гладкими, а понятие аппроксимации используется применительно к пространству $C^r(V, W)$, $0 \leqslant r \leqslant \infty$, снабженному тонкой C^r-топологией (см. ([6])).

C^1-изометрию $V \to W$ назовем нэшевой, если она допускает C^1-аппроксимацию короткими отображениями $V \to W$. Например, если $W = R^q$, а многообразие V компактно или если $\operatorname{neg} h > \operatorname{neg} g$, то любая изометрия $V \to W$ нэшева, а стандартная изометрия $R^{q-k} \to R^q$ не нэшева.

III. C^1-изометрии.

Теорема 1. *Пусть f: $V \to W$ — гладкое отображение и выполнено одно из двух условий:*

а) $\operatorname{pos} h > \operatorname{pos} g$, $\operatorname{neg} h > \operatorname{neg} g$,

б) $\operatorname{pos} h > \operatorname{pos} g$, $\operatorname{neg} g = 0$ *и f — короткое отображение.*

Тогда для существования C^0-аппроксимации отображения f нэшевыми C^1-изометриями $V \to W$ необходимо и достаточно существование изометрического гомоморфизма $\alpha \to f^*(\omega)$.

Следствие. А. *Если многообразие V стягиваемо,* $\operatorname{pos} h > \operatorname{pos} g$, $\operatorname{neg} h > \operatorname{neg} g$, *то любое непрерывное отображение $V \to W$ аппроксимируется C^1-изометриями.*

Многообразие M называется π-многообразием, если касательный пучок многообразия $M \times R^1$ тривиален; пример π-многообразия — n-мерная сфера.

В. *Короткое C^1-отображение n-мерного риманова π-многообразия в R^{n+1} допускает C^0-аппроксимацию C^1-изометриями. (Заметим, что короткое отображение не предполагается погружением.)*

С. *Для любых линейно независимых векторных полей $X_1, \ldots, X_n$ на римановом многообразии M найдутся такие C^1-функции $f_1, \ldots, f_{n+1}$: $M \to R^1$, что* $\sum\limits_{i=1}^{n+1} (X_k f_i)(X_l f_i) = (X_k, X_l)$, $1 \leqslant k,\ l \leqslant n$. *(Через Xf обозначается производная по X функции f (см. (*[1]*)), а через (X, Y) — скалярное произведение полей X и Y.)*

Теорема 2. *Отображение пространства C^1-изометрий $V \to W$ в пространство изометрических морфизмов $\alpha \to \omega$, относящее изометрии f морфизм δ_f, является слабой гомотопической эквивалентностью (т. е. индуцирует изоморфизм гомотопических групп) в следующих двух случаях:*

а) $\operatorname{pos} h > \operatorname{pos} g$, $\operatorname{neg} h > \operatorname{neg} g$;

б) $W = R^q$ *с* $q > \operatorname{pos} g$.

Следствие. *Две гомотопные C^1-изометрии $V \to W$ при* $\operatorname{pos} h > \operatorname{pos} g + \dim V$, $\operatorname{neg} h > \operatorname{neg} g + \dim V$ *можно соединить путем в пространстве C^1-изометрий $V \to W$.*

IV. C^1-вложения. Два мономорфизма $\eta \to \theta$ называются гомотопными, если они соединимы непрерывным семейством мономорфизмов $\eta \to \theta$.

Теорема 3. *Предположим, что $\alpha = \tau(V)$ (т. е. V есть псевдориманово многообразие с метрикой g). Пусть f: $V \to W$ — гладкое вложение и выполнено одно из двух условий:*

а) $\operatorname{pos} h > \operatorname{pos} g$, $\operatorname{neg} h > \operatorname{neg} g$,

б) $\operatorname{pos} h > \operatorname{pos} g$, $\operatorname{neg} g = 0$ *и f — короткое отображение.*

Тогда для существования C^0-аппроксимации отображения f нэшевыми изометрическими C^1-вложениями $V \to W$, диффеотопными вложению f, необходимо и достаточно существование изометрического мономорфизма $\alpha \to f^*(\omega)$, гомотопного мономорфизму $|\delta_f| = |d_f|$: $\alpha \to f^*(\omega)$.

Следствие. *Если V компактно, то любое непрерывное отображение $V \to W$ при* $\operatorname{pos} h > \operatorname{pos} g + \dim V$, $\operatorname{neg} h \geqslant \operatorname{neg} g + \dim V$ *аппроксимируется изометрическими C^1-вложениями.*

V. Свободные погружения. Для пучка η над A через η^2 обозначим его симметрический квадрат. Через $X \circ Y \in (\eta^2)_a$, $a \in A$, обозначим вектор, соответствующий паре векторов $X, Y \in \eta_a$. (Симметрическим квадратом η^2 называется ассоциированный с η пучок, слой $(\eta^2)_a$, $a \in A$, которого есть симметрическое произведение $\eta_a \circ \eta_a$, см. ([2]).)

Далее распределение α на V предполагается инволютивным. (Распределение α называется инволютивным (см. [1]), если скобка Пуассона двух векторных полей, принадлежащих α, также принадлежит α.)

Рассмотрим C^2-отображение $f\colon V \to W$. Предположим, что форма $g(|\delta_f|) = g(\delta_f)$ невырождена, и обозначим через $P\colon f^*(\omega) \to f^*(\omega)$ (ортогональную относительно метрики $f^*(h)$) проекцию на ортогональное дополнение образа пучка α при гомоморфизме $|\delta_f|\colon \alpha \to f^*(\omega)$. Определим гомоморфизм $|\delta_f|^2\colon \alpha^2 \to f^*(\omega)$ следующим условием. Если $X, Y \in \alpha_v$, $v \in V$, $\bar{Y}$ — гладкое сечение пучка α, продолжающее вектор Y, а Y_1 — образ сечения $\bar{Y}$ при гомоморфизме $|\delta_f|$, то $|\delta_f|^2(X \circ Y) = P\nabla_X Y_1$, где через $\nabla_X Y_1 \in (f^*(\omega))_v$ обозначена ковариантная производная по X сечения Y^0 пучка $f^*(\omega)$ со связностью, индуцированной из псевдоримановой связности в ω. C^2-отображение $f\colon V \to W$ назовем α-свободным, если индуцированная в α форма $g(\delta_f)$ невырождена, а индуцированная в α^2 форма $g(|\delta_f|^2)$ положительна. Если $\alpha = \tau(V)$, то α-свободное отображение называется свободным. Например, погружение $R^1 \to W$ свободно, если оно индуцирует в R^1 невырожденную форму, его геодезическая кривизна не обращается в нуль, а на главной нормали форма h положительна.

Теорема 4. *Если многообразия V, W, распределение α и метрики g, h аналитичны, то α-свободная C^∞-изометрия $V \to W$ допускает C^∞-аппроксимацию аналитическими изометриями $V \to W$.*

Далее полагаем $n = \dim \alpha$, $s = s_n = \dim \alpha^2 = n(n+1)/2$.

Теорема 5. *Для того чтобы нэшева C^1-изометрия $f\colon V \to W$ допускала C^1-аппроксимацию α-свободными C^∞-изометриями $V \to W$ при* $\operatorname{pos} h \geqslant s + \operatorname{pos} g + 2n + 5$, *необходимо и достаточно существование мономорфизма $\varphi\colon \alpha^2 \to f^*(\omega)$, образ которого ортогонален (относительно метрики $f^*(h)$) образу гомоморфизма $|\delta_f|\colon \alpha \to f^*(\omega)$ и для которого форма $g(\varphi)$ положительна.*

Сопоставление теорем 3, 4, 5 приводит к следствиям:

Следствие. А. *При* $\operatorname{neg} h \geqslant \operatorname{neg} g + \dim V$, $\operatorname{pos} h \geqslant s + \dim V + 2n + 5$ *любое непрерывное отображение $V \to W$ допускает C^0-аппроксимацию α-свободными C^∞-изометриями $V \to W$.*

В. *n-Мерное риманово многообразие класса C^i, $i = \infty, a$, обладает изометрическим C^i-вложением в R^q с $q = s + 3n + 5$, причем для полного многообразия можно выбрать вложение без предельного множества; если многообразие компактно и аналитично, то оно допускает изометрическое C^a-вложение в R^q с $q = s + 3n + 4$.*

Назовем морфизм $\varphi\colon \alpha \oplus \alpha^2 \to \omega$ (через $\alpha \oplus \alpha^2$ обозначена сумма Уитни пучков α и α^2) полуизометрическим, если индуцированная им в $\alpha \oplus \alpha^2$ форма $g(\varphi)$ невырождена, совпадает на подпучке α с g и $\operatorname{neg} g(\varphi) = \operatorname{neg} g$.

Теорема 6. *Отображение пространства α-свободных C^∞-изометрий $V \to W$ в пространство полуизометрических морфизмов $\alpha \oplus \alpha^2 \to \omega$, относящее изометрии f морфизм $(f, |\delta_f| \oplus \delta_f|^2)\colon \alpha \oplus \alpha^2 \to \omega$ (через $|\delta_f| \oplus |\delta_f|^2\colon \alpha \oplus \alpha^2 \to f^*(\omega)$ обзначена прямая сумма гомоморфизмов $|\delta_f|$ и $|\delta_f|^2$), является слабой гомотопической эквивалентностью в следующих двух случаях:*

а) $\operatorname{pos} h \geqslant s + \operatorname{pos} g + 2n + 5$, $\operatorname{neg} h > \operatorname{neg} g$;

б) $W = R^q$, $q \geqslant s + 3n + 5$.

Следствие. *Два свободных изометрических погружения n-мерного риманова многообразия в R^q при $q \geqslant s + 3n + 5$ соединимы C^∞-изгибанием.*

VI. Римановы многообразия. Цель дальнейшего — снять в ряде случаев размерностные ограничения предыдущего пункта.

Теорема 7. *Пусть V — n-мерное риманово многообразие, V_0 — его связное замкнутое подмногообразие, а W — стягиваемое риманово многообразие. Обозначим через β сужение на V_0 касательного пучка $\tau(V)$, а через ν — нормальный пучок подмногообразия V_0.*

а) *Если* ν *есть тривиальный одномерный пучок, а многообразие* V_0 *как риманово многообразие с метрикой, индуцированной из* V, *приводимо или если* $\dim \nu \geqslant 2$, *то для того, чтобы некоторая окрестность* $U \subset V$, *содержащая подмногообразие* V_0, *обладала свободным изометрическим вложением в* W, *необходимо и достаточно существование инъекции* $\beta \oplus \beta^2 \to \tau(W)$. (*Для* π-*многообразия* V *инъекция* $\beta \oplus \beta^2 \to \tau(W)$ *существует при* $\dim W \geqslant \geqslant s + n$.)

б) *Если многообразия* V, W *и подмногообразие* V_0 *аналитичны, пучок* β *тривиален, а пучок* ν *имеет не обращающееся в нуль сечение и* $\dim \nu \geqslant 3$, *то при* $\dim W \geqslant s = n(n+1)/2$ *некоторая окрестность* $U \subset V$, *содержащая подмногообразие* V_0, *обладает аналитическим изометрическим вложением в* W.

Теорема 8. *Пусть* V_0 — *компактное* $(n-1)$-*мерное риманово* π-*многообразие и* f_1, f_2: $V_0 \to R^q$ — *свободные изометрические* C^∞-*погружения* (C^∞-*вложения*). *Если* $q \geqslant s + 2n + 2$ $(s = n(n+1)/2)$, *то для некоторого* $l > 0$ *существует такое свободное изометрическое* C^∞-*погружение* (C^∞-*вложение*) f *цилиндра* $V_0 \times [0, l]$ *в* R^q, *что* $f|_{V_0 \times 0} = f_1$, $f|_{V_0 \times l} = f_2$.

VII. Топологические предложения. А. *Пусть* M — *гладкое открытое* π-*многообразие,* W — *риманово многообразие,* f: $M \to W$ — *непрерывное отображение и* k — *вещественное число. Для существования свободного* C^∞-*погружения* $M \to W$, *гомотопного отображению* f *и индуцирующего в* M *метрику постоянной кривизны* k, *необходимо и достаточно существование мономорфизма* $\tau(M) \oplus (\tau(M))^2 \to f^*(\tau(W))$.

В. *Пусть* M — *гладкое* n-*мерное* π-*многообразие и* f, g: $M \to R^q$ — *непрерывные отображения. Если* $q > s/2 + n$ $(s = n(n+1)/2)$, *то* f, g *допускают* C^0-*аппроксимацию* C^∞-*погружениями* f_1, g_1: $M \to R^q$, *индуцирующими в* M *одну и ту же метрику*.

Я благодарю проф. В. А. Рохлина, привлекшего меня к этой тематике и к организованному им семинару по изометрическим вложениям. Выражаю признательность руководителю и участникам этого семинара, а также В. Л. Эйдлину за обсуждения.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
3 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Бишоп, Р. Криттенден, Геометрия многообразий, М., 1967. [2] Дж. М. Бордман, Сборн. Особенности дифференцируемых отображений, М., 1968. [3] М. Л. Громов, ДАН, 182, № 2, 255 (1968). [4] М. Л. Громов, Изв. АН СССР, сер. матем., 33, в. 4, 707 (1969). [5] М. Л. Громов, В. А. Рохлин, УМН, 25, в. 2 (1970). [6] Дж. Мезер, Сборн. Особенности дифференцируемых отображений, М., 1968.