**Доклады Академии наук СССР**
1970. Том 192, № 6

*ФИЗИКА*

Я. С. ДЕРБЕНЕВ, А. М. КОНДРАТЕНКО,
член-корреспондент АН СССР А. Н. СКРИНСКИЙ

# О ДВИЖЕНИИ СПИНА ЧАСТИЦ В НАКОПИТЕЛЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОЛЕМ

При изучении поведения поляризации частиц в ускорителях обычно [6–9] ограничиваются случаем почти постоянного по направлению магнитного поля. В данной работе излагаются общие результаты исследования движения спина в накопителях (ускорителях) с произвольным электромагнитным полем, представляющие практический интерес.

1. Прежде чем перейти непосредственно к предмету данной работы, дадим простой и физически наглядный вывод спиновых уравнений для частиц с любым спином. В квазиклассическом приближении уравнение для среднего вектора спина $\langle \hat{\mathbf{s}} \rangle = \boldsymbol{\zeta}$ в системе покоя частицы получаются из известных ковариантных уравнений б. м. т. [1, 2]. При этом, однако, оказывается завуалированной физическая наглядность уравнений для $\boldsymbol{\zeta}$. В действительности существует очень простой вывод уравнений без промежуточного использования 4-вектора поляризации.

В инерциальной системе координат, совпадающей с собственной в момент времени $t$ (и-система), за интервал собственного времени $d\tau = dt / \gamma$ вектор $\boldsymbol{\zeta}$ получит приращение [2, 3]

$$d\boldsymbol{\zeta}_и = [\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}_c]\, d\tau,$$

где $\boldsymbol{\mu}$ — магнитный момент частицы; $\mathbf{H}_c$ — магнитное поле в системе покоя. Однако собственная система (получаемая из лабораторной преобразованием Лоренца) через время $dt$ оказывается повернутой относительно и-системы. Угол поворота $d\varphi$ можно найти из простых соображений. Пусть $d\alpha = \frac{1}{v^2}[\mathbf{v}\, d\mathbf{v}]$ — угол поворота скорости в л-системе. Тогда собственная система, в соответствии с ее определением, повернется относительно нового направления скорости $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ на угол $-d\alpha$. В то же время направление $(\mathbf{v} + d\mathbf{v})_и$ в и-системе составит с направлением $\mathbf{v}$ угол $\gamma\, d\alpha$. Действительно, эти направления в и-системе получаются проектированием соответствующих направлений л-системы на плоскость $\tau = \mathrm{const}$. Такая процедура как раз и соответствует определению угла в и-системе между двумя «стержнями», покоящимися в л-системе. Следовательно, угол поворота

$$d\varphi = \gamma\, d\alpha - d\alpha = \frac{\gamma - 1}{v^2}[\mathbf{v}\, d\mathbf{v}].$$

Таким образом, искомое уравнение есть:

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \frac{1}{\gamma}\frac{d\boldsymbol{\zeta}_и}{d\tau} - [\dot{\boldsymbol{\varphi}}\boldsymbol{\zeta}] = \frac{1}{\gamma}[\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}_c] + \frac{\gamma - 1}{v^2}[\boldsymbol{\zeta}[\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}]]. \qquad (1)$$

Второй член в (1), не связанный с магнитным моментом частицы, является следствием релятивистской кинематики вращения *. Идея данного вывода содержится в давних работах Томаса [5] («томасовская половинка»).

---

* При $\mu = 0$ в системе покоя, вращающейся вместе со скоростью, после обхода по окружности спин повернется вокруг направления $[\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}]$, не на угол $-2\pi$, а на угол $-2\pi\gamma$ вследствие лоренцева «растяжения длины окружности» [4] при сохранении радиуса.

Используя уравнения движения частицы и выражение $\mathbf{H}_c$ через поля в л-системе, преобразуем (1) к виду

$$\dot{\zeta} = [\mathbf{W}_л \zeta]; \quad \mathbf{W}_л = \left(1 + \gamma \frac{q'}{q_0}\right) \frac{[\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}]}{v^2} - \frac{q}{\gamma} \frac{(\mathbf{H}\mathbf{v})}{v^2} \mathbf{v} + \frac{q}{\gamma^2 v^2} [\mathbf{E}\mathbf{v}], \tag{2}$$

где $q = \mu/s = q_0 + q' = \frac{e}{m} + q'$, $q'$ — аномальная часть гиромагнитного отношения ($c = 1$). Уравнения (1), (2) совпадают с соответствующими уравнениями работ [1, 2].

2. Поставим задачу о движении спина частицы в накопителе с произвольным электромагнитным полем, предполагая существование замкнутой (периодической, равновесной) орбиты. Энергию частицы на равновесной траектории будем считать постоянной. Угловую скорость $\mathbf{W}_л$ представим в виде

$$\mathbf{W}_л = \mathbf{W}_s + \mathbf{w}; \quad \mathbf{W}_s(\theta) = \mathbf{W}_s(\theta + 2\pi); \quad \theta = \omega_s t, \tag{3}$$

где $\omega_s$ — равновесная частота обращения частицы; $\mathbf{W}_s$ — значение $\mathbf{W}_л$ на равновесной траектории; $\mathbf{w}$ — добавка, связанная с отклонением частицы от периодической орбиты.

3. Обратимся к исследованию движения спина равновесных частиц, удовлетворяющего уравнению

$$\dot{\zeta} = [\mathbf{W}_s \zeta]. \tag{4}$$

Общее решение (4) можно представить в виде комбинации трех линейно независимых решений $\mathbf{x}_\alpha(\theta)$ ($\alpha = 1, 2, 3$). Так как скалярное произведение двух любых решений (4) сохраняется

$$\frac{d}{dt}(\zeta_a \zeta_b) = 0, \tag{5}$$

то базисные решения всегда можно выбрать постоянно ортогональными:

$$\mathbf{x}_\alpha \mathbf{x}_\beta \equiv \delta_{\alpha\beta}; \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \tag{6}$$

Задавшись каким-либо базисом (6), будем искать решения (4), обладающие свойством:

$$\zeta(\theta + 2\pi) = \lambda \zeta(\theta), \quad \lambda = \mathrm{const}.$$

Разложив $\zeta$ по базису $\mathbf{x}_\alpha$, получим систему уравнений для определения проекций $\zeta_\alpha = \zeta \mathbf{x}_\alpha$:

$$\sum_{\beta=1}^{3} (\lambda \delta_{\alpha\beta} - \Lambda_{\alpha\beta}) \zeta_\beta = 0; \quad \Lambda_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_\alpha(\theta) \mathbf{x}_\beta(\theta + 2\pi).$$

Ввиду (5) матрица $\Lambda$ не зависит от времени, так как $\mathbf{x}_\beta(\theta + 2\pi)$ есть решение (4) в силу периодичности $\mathbf{W}_s(\theta)$. Ненулевое решение $\zeta_\alpha$ существует, если

$$|\lambda \delta_{\alpha\beta} - \Lambda_{\alpha\beta}| = \mathrm{Det}(\lambda I - \Lambda) = 0.$$

Так как $\Lambda$, в силу (5), является матрицей вращения, то $\lambda = 1$ есть ее собственное значение, соответствующее периодическому решению

$$\mathbf{n}(\theta) = \mathbf{n}(\theta + 2\pi); \quad \mathbf{n}^2 = 1.$$

Два других собственных значения находятся из соотношений

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mathrm{Sp}\,\Lambda; \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = |\Lambda| = 1.$$

Отсюда

$$\lambda_2 = \lambda_3^* = e^{-2\pi i \nu}; \quad \cos 2\pi\nu = {}^1/_2 (\mathrm{Sp}\,\Lambda - 1).$$

Из (5) следует, что $\cos 2\pi\nu$ не зависит от выбора базиса $\mathbf{x}_\alpha$.

Собственные решения $\mathbf{n}$; $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\eta}^*$, соответствующие собственным значениям 1; $e^{-2\pi i\nu}$, $e^{2\pi i\nu}$, ортогональны, если $\cos 2\pi\nu \neq 1$; при этом периодическое решение единственно. В случае точного резонанса $\cos 2\pi\nu = 1$, имеет место вырождение, и любое решение для спина является периодическим.

Будем в дальнейшем рассматривать движение спина относительно следующего периодического базиса:

$$\{\mathbf{e}_\alpha\} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}); \quad \mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2 = \boldsymbol{\eta} e^{i\nu\theta} \equiv \mathbf{e}. \tag{7}$$

Общее решение (4) можно записать в виде

$$\boldsymbol{\zeta}(\theta) = \zeta_n \mathbf{n} + \zeta_\perp \operatorname{Re}(\mathbf{e}\cdot e^{-i\Psi}); \quad \zeta_n = \mathrm{const}; \quad \zeta_\perp = \sqrt{s^2 - \zeta_n^2};$$
$$\dot{\Psi} = \nu\omega_s. \tag{8}$$

Итак, движение спина на периодической орбите происходит следующим образом. Существует некоторое периодическое направление $\mathbf{n}(\theta)$, имеющее смысл направления поляризации периодического решения, вокруг которого спин вращается, сохраняя проекцию на это направление. Далее, независимо от места наблюдения и начальных условий, через период движения по орбите спин поворачивается вокруг $\mathbf{n}$ на один и тот же угол $2\pi\nu$.

Практически важно, что структура $\mathbf{W}_s$ позволяет в заданном месте орбиты создавать нужную ориентацию $\mathbf{n}$ относительно скорости и поля.

4. Рассмотрим вопрос об устойчивости периодического решения по отношению к вариациям $\mathbf{W}_s$, которые могут быть связаны как с отклонением реального поля и замкнутой орбиты от идеальных (расчетных), так и с изменением параметров (например энергии), определяющих $\mathbf{W}_s$. В линейном приближении вариация $\delta\mathbf{n}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{n} = [\mathbf{W}_s\delta\mathbf{n}] + [\delta\mathbf{W}_s\mathbf{n}].$$

Периодическое решение этого уравнения есть

$$\delta\mathbf{n} = \operatorname{Re}\mathbf{e}\sum_k \frac{(\delta\mathbf{W}_s\mathbf{e}^*)_k}{(\nu - k)\,\omega_s} e^{-ik\theta},$$

где $(\delta\mathbf{W}_s\mathbf{e}^*) = \sum_k (\delta\mathbf{W}_s\mathbf{e}^*)_k e^{-ik\theta}$.

Как видно, периодическое решение $\mathbf{n}$ становится очень чувствительным к малым изменениям $\mathbf{W}_s$ вблизи резонансов $\nu = k$. В этом заключается физический смысл отмеченной выше неопределенности $\mathbf{n}$ при точном резонансе.

5. Движение спина частиц, движущихся вблизи равновесной траектории, удобно рассматривать относительно периодического базиса (7). Угловая скорость вращения спина в этой системе

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_л - \mathbf{W}_b = \mathbf{W}_л - {}^1/_2\sum_{\alpha=1}^{3}[\mathbf{e}_\alpha\dot{\mathbf{e}}_\alpha] = \nu\omega_s\mathbf{n} + \mathbf{w},$$

где $\mathbf{W}_b$ — угловая скорость вращения базисного репера.

В системе (7) спиновые уравнения (2) имеют вид

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = [\mathbf{W}\boldsymbol{\zeta}]. \tag{9}$$

Уравнение (9) можно записать в гамильтоновых переменных проекции $\zeta_n$ и фазы вращения $\Psi$ вокруг $\mathbf{n}$ (см. (8))

$$\dot{\zeta}_n = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Psi} = w_\perp\zeta_\perp\sin(\Psi - \delta);$$
$$\dot{\Psi} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\zeta_n} = \nu\omega_s + \mathbf{w}\mathbf{n} - w_\perp\frac{\zeta_n}{\zeta_\perp}\cos(\Psi - \delta), \tag{10}$$

где $\mathcal{H} = \mathbf{W}\boldsymbol{\zeta} = (\nu\omega_s + \mathbf{w}\mathbf{n})\zeta_n + w_\perp\zeta_\perp\cos(\Psi - \delta)$, $w_\perp e^{i\delta} = \mathbf{w}\mathbf{e}$.

При $\mathbf{w} = 0$ решение (9), (10) совпадает с (8).

Так как при получении (9), (10) не использовалась конкретная структура электромагнитного поля, то такую же форму уравнения имеют, в частности, при движении в почти однородном магнитном поле. Поэтому основной вывод работ [6-9] по исследованию устойчивости поляризации в почти однородном поле можно перенести и на общий случай: движение спина возле периодического решения может стать неустойчивым лишь вблизи резонансов

$$\nu = k + \sum_i k_i\nu_i,$$

где $\nu_i$ — частоты бетатронных и энергетических колебаний частицы.

6. Согласно работам [10–13], в магнитном поле имеет место радиационная поляризация. В ультрарелятивистском случае степень равновесной поляризации в однородном поле равна $8/5\sqrt{3}$. В работе [13] получено уравнение для средней по ансамблю поляризации с учетом процессов излучения в произвольном внешнем поле ($s = 1/2$):

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = [\mathbf{W}_л \boldsymbol{\zeta}] - \frac{1}{T}\left[\boldsymbol{\zeta} - \frac{2}{9}(\boldsymbol{\zeta}\mathbf{v})\,\mathbf{v} + \frac{4}{\zeta\sqrt{3}}\frac{[\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}]}{|\dot{\mathbf{v}}|}\right];$$

$$\frac{1}{T} = \frac{5\sqrt{3}}{8}\,\alpha\,\frac{\hbar^2}{m^2}\,\gamma^5\,|\dot{\mathbf{v}}|^3; \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar} = \frac{1}{137}.$$

Так как радиационный член мал, уравнение может быть решено методом усреднения. Полагая $\mathbf{w} = 0$, при $\nu \neq k$ получаем следующий результат: равновесная поляризация будет направлена по $\mathbf{n}(\theta)$, а ее степень равна

$$2\zeta_{\mathbf{n}\atop t\to\infty} = \frac{8}{5\sqrt{3}}\,\frac{\langle |\dot{\mathbf{v}}|^3 n_z\rangle}{\langle |\dot{\mathbf{v}}|^3 (1 - {}^2/_9 n_v^2)\rangle} \leqslant \frac{8}{5\sqrt{3}},$$

где $n_z = \mathbf{n}[\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}]\,/\,|\dot{\mathbf{v}}|$, $n_v = \mathbf{n}\mathbf{v}$, скобки $\langle \ldots \rangle$ означают усреднение по периоду обращения частицы.

7. Существование устойчивого периодического движения спина означает, что в накопителе с произвольным электромагнитным полем (при условии существования замкнутой орбиты) поляризация пучка устойчива в такой же степени, как и в накопителе с почти постоянным по направлению магнитным полем. Это открывает широкие возможности управления поляризацией в накопителях.

Институт ядерной физики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
4 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] V. Bargmann, L. Michel, V. Telegdi, Phys. Rev. Lett., 2, 435 (1959). [2] В. Б. Берестецкий, Е. Н. Лифшиц, Л. П. Питаевский, Релятивистская квантовая теория, ч. I, М., 1968. [3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, М., 1963. [4] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, М., 1960. [5] L. H. Thomas, Nature, 117, 514 (1926); Phil. Mag., 3, 1 (1927). [6] Х. А. Симонян, Ю. Ф. Орлов, ЖЭТФ, 45, № 2, (1963). [7] Ю. Ф. Орлов, С. А. Хейфец, Изв. АН АрмССР, 13, № 1 (1960). [8] Х. А. Симонян, Тр. IV Международн. конф. по ускорителям, Дубна, 1963. [9] Х. А. Симонян, Диссертация, Ереван, 1969. [10] А. А. Соколов, И. М. Тернов, ДАН, 153, 1952 (1963). [11] V. N. Baier, V. M. Katkov, Phys. Lett., 24A, 327 (1967). [12] В. Н. Байер, В. М. Катков, ЖЭТФ, 52, 1422 (1967). [13] В. Н. Байер, В. М. Катков, В. М. Страховенко, Препринт Инст. ядерн. физ. СО АН СССР, № 333; Phys. Lett., 31A, № 4 (1970).