Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Г. М. ЗАСЛАВСКИЙ

ОБ ИЗМЕНЕНИИ АДИАБАТИЧЕСКОГО ИНВАРИАНТА НЕЛИНЕЙНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 25 XI 1969)

Поведение динамических систем с медленно меняющимися во времени параметрами достаточно хорошо изучено. Существует, с одной стороны, доказательство сохранения адиабатических инвариантов во всех порядках теории возмущений ([1]), с другой стороны, достаточно удобные методы вычисления экспоненциально малых поправок к адиабатическим инвариантам ([2, 3]). Следует упомянуть также и более универсальные теоремы Арнольда — Колмогорова ([4]) и Мозера ([5]).

Предметом этой статьи является исследование нелинейных периодических волн, описываемых уравнениями в частных производных в слабо неоднородной среде. В настоящее время имеется лишь один результат Мозера ([6]), содержанием которого является доказательство сохранения во всех порядках теории возмущений некоторой величины для нелинейной стационарной волны, аналогичной адиабатическому инварианту динамической системы. Мы покажем ниже, каким образом могут быть вычислены экспоненциально малые поправки к величинам, характеризующим волну.

Для определенности рассмотрим модель, в которой нелинейные стационарные волны описываются уравнением Кортевега — де Вриза:

$$v_t + vv_x + \Lambda v_{xxx} = 0, \tag{1}$$

где $\Lambda = \Lambda(x)$ — медленно зависящая от координаты функция, характеризующая неоднородность среды. К уравнению (1) приводят различные задачи теории плазмы и волн на воде конечной глубины ([7]), колебаний цепочки связанных осцилляторов ([8]) и др.

Уравнение (1) можно заменить каноническими уравнениями движения

$$\dot{v}(q) = iq\,\frac{\delta H(\Lambda)}{\delta v(-q)}; \quad v = \int dq\, e^{iqx} v(q); \quad v(-q) = v^*(q), \tag{2}$$

где гамильтониан $H(\Lambda)$ определен выражением

$$H(\Lambda) = -{}^1/_2 \int dq_1 dq_2 dq_3 q_1 q_2 v(q_1)\, v(q_2)\, \Lambda(q_3)\, \delta(q_1 + q_2 + q_3) - $$
$$- {}^1/_6 \int dq_1 dq_2 dq_3 v(q_1)\, v(q_2)\, v(q_3)\, \delta(q_1 + q_2 + q_3). \tag{3}$$

В том случае, когда $\Lambda(x) = \Lambda_0$ и Λ_0 не зависит от x, гамильтониан $H_0 \equiv H(\Lambda_0)$ для нелинейной периодической волны вырождается в сумму

$$H_0 = {}^1/_2 \Lambda_0 \sum_n (kn)^2 v_n v_{-n} - {}^1/_6 \sum_{n_1+n_2+n_3=0} v_{n_1} v_{n_2} v_{n_3}, \tag{4}$$

где $\lambda = 2\pi / k$ — пространственный период колебаний волны, а v_n — фурье-амплитуды разложения

$$v = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n e^{inkx}; \quad v_{-n} = v_n^*. \tag{5}$$

Уравнения движения (2) заменяются при этом на

$$\dot{v}_n = ikn\, \partial H_0 / \partial v_{-n}; \quad \dot{v}_{-n} = -ikn\, \partial H_0 / \partial v_n. \tag{6}$$

Поскольку волновое решение имеет вид $v = v(x - ut)$, где u — скорость волны, то в формуле (5) коэффициенты разложения представим в виде

$$v_n = a_n e^{-inkut}; \quad a_{-n} = a_n^*, \tag{7}$$

где a_n не зависят от t и являются известными функциями от u. Для нелинейной периодической волны существует однозначная связь $H_0 = H_0(k, u)$, и мы в дальнейшем величины a_n и u будем рассматривать как функции H_0 и k.

Представим теперь гамильтониан (3) в виде

$$H(\Lambda) = H(\overline{\Lambda}) + H_1; \tag{8}$$

$$H(\overline{\Lambda}) = {}^1/_2\,\overline{\Lambda} \int dq\, q^2 v(q)\, v(-q) - {}^1/_6 \int dq_1 dq_2 dq_3 v(q_1)\, v(q_2)\, v(q_3) \delta(q_1 + q_2 + q_3);$$

$$H_1 = -{}^1/_2 \int dq_1 dq_2 dq_3 q_1 q_2 v(q_1)\, v(q_2)\, [\Lambda(q_3) - \\ - \overline{\Lambda}(q_3)\, \delta(q_3)]\, \delta(q_1 + q_2 + q_3). \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что $\overline{\Lambda} = \frac{1}{2\pi} \int dx\, \Lambda(x)$. Ниже станет ясно, что в случае $kR \gg 1$, где R — характерный масштаб изменения Λ: $R \sim \Lambda / (d\Lambda / dx)$, величина $H_1 \ll H(\overline{\Lambda})$. Это позволяет искать решение в виде, аналогичном (7) [9]:

$$v = \sum_n a_n(t)\, e^{in(kx - \vartheta)}, \tag{10}$$

где

$$\dot{a}_n / a_n \sim O(H_1); \quad \dot{u} / u \sim O(H_1); \quad \dot{\vartheta} = ku(t) + O(H_1).$$

Подстановка (10) в (9) дает

$$H(\overline{\Lambda}) = {}^1/_2\,\overline{\Lambda} \sum_n (kn^2)\, v_n v_{-n} - {}^1/_6 \sum_{n_1+n_2+n_3=0} v_{n_1} v_{n_2} v_{n_3} =$$

$$= {}^1/_2\,\overline{\Lambda} \sum_n (kn)^2\, a_n a_{-n} - {}^1/_6 \sum_{n_1+n_2+n_3=0} a_{n_1} a_{n_2} a_{n_3}; \tag{11}$$

$$H_1 = -{}^1/_2 \sum_{n_1+n_2+n_3=0} (kn_1)(kn_2)\, v_{n_1} v_{n_2} [\Lambda_{n_3} - \Lambda_0]; \tag{12}$$

$$\Lambda_n = \frac{1}{2\pi} \int dx\, \Lambda(x)\, e^{-inkx}; \quad \overline{\Lambda} = \Lambda_0; \quad \Lambda_{-n} = \Lambda_n^*. \tag{13}$$

Из формулы (11) следует, что функциональная связь между величинами $H(\overline{\Lambda})$, u и k такая же, как в однородной среде с $\Lambda(x) = \overline{\Lambda} = \Lambda_0$. Из (12) следует, что в выражение для H_1 входят только члены Λ_{n_3}, $n_3 \geqslant 1$. Из (13) и неравенства (11) следует, что все Λ_n с $n \geqslant 1$ экспоненциально малы и имеют порядок

$$\Lambda_n \propto \exp(-nkR), \tag{14}$$

причем для заданного $\Lambda(x)$ все Λ_n в принципе вычисляемы и предполагаются известными.

Оценка (14) показывает, что с точностью до членов следующего порядка в (12) достаточно оставить только часть, содержащую Λ_1:

$$H_1 = -{}^1/_2 \sum_n \{(kn)\,[k(1+n)]\, v_n v_{-1-n} \Lambda_1 + \\ + (kn)\,[k(n-1)]\, v_n v_{1-n} \Lambda_{-1}\} + O(\Lambda_1^2). \tag{15}$$

Вычислим теперь изменение $H(\overline{\Lambda})$ со временем

$$\frac{dH(\overline{\Lambda})}{dt} = \sum_n \left\{ \frac{\partial H(\overline{\Lambda})}{\partial v_n} \dot{v}_n + \frac{\partial H(\overline{\Lambda})}{\partial v_{-n}} \dot{v}_{-n} \right\}.$$

Для величины $\dot{v}_{\pm n}$ воспользуемся точными выражениями (6), в которых надо заменить H_0 на $H(\Lambda)$, определенное формулами (8), (11) и (15). Это дает

$$\dot{H}(\overline{\Lambda}) = \sum_n ikn \left\{ \frac{\partial H(\overline{\Lambda})}{\partial v_n} \frac{\partial H_1}{\partial v_{-n}} - \frac{\partial H(\overline{\Lambda})}{\partial v_{-n}} \frac{\partial H_1}{\partial v_n} \right\}. \tag{16}$$

Учитывая, что правая часть в (16) имеет порядок малости Λ_1, запишем с помощью **(6)** и **(10)**:

$$\frac{\partial H(\overline{\Lambda})}{\partial v_{\pm n}} = \pm\frac{1}{ikn}\dot{v}_{\mp n} + O(\Lambda_1) = \pm u v_{\mp n} + O(\Lambda_1). \tag{17}$$

Подстановка (15), (12) и (17) в (16) приводит к уравнению

$$\dot{H}(\overline{\Lambda}) = i\sum_n \dot{\vartheta}(kn)^2\{(1-n)a_{-n}a_{n-1}\Lambda_1 e^{i\vartheta} -$$

$$-(1+n)a_{-n}a_{n+1}\Lambda_{-1}e^{-i\vartheta}\} + O(\Lambda_1^2); \tag{18}$$

$$\dot{\vartheta} = ku + O(\Lambda_1).$$

Кроме того, следует рассматривать с той же точностью $a_n = a_n(k, H(\overline{\Lambda}))$; $u = u(k, H(\overline{\Lambda}))$, и изменением $H(\overline{\Lambda})$ в правой части следует пренебречь. Полученное выражение (18) позволяет вычислить экспоненциально малое изменение $H(\overline{\Lambda})$

$$\Delta H(\overline{\Lambda}) = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\dot{H}(\overline{\Lambda})\,dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} i\sum_n (kn)^2\{(1-n)a_{-n}a_{n-1}\Lambda_1(e^{i\vartheta_+} - e^{i\vartheta_-}) -$$

$$-(1+n)a_{-n}a_{n+1}\Lambda_{-1}(e^{-i\vartheta_+} - e^{-i\vartheta_-})\} + O(\Lambda_1^2), \tag{19}$$

где $\vartheta_\pm = \vartheta(\pm T)$. Прежде чем перейти к пределу $T\to\infty$, проведем вспомогательные оценки множителей, содержащих фазы $\vartheta_\pm$:

$$e^{i\vartheta_+} - e^{i\vartheta_-} = \exp\left\{i\int_{-T}^{T}\omega(t)\,dt\right\}(1 + O(\Lambda_1 T)); \quad \omega(t) = ku(t), \tag{20}$$

где мы считаем в дальнейшем T достаточно большим, но *

$$\omega T\Lambda_1/\Lambda_0 \leqslant 1. \tag{21}$$

С той же точностью можно получить

$$\int_{-T}^{T}\omega(t)\,dt = 2T\omega(0) + O\left(\frac{d\omega}{dH}\Delta H\cdot T\right). \tag{22}$$

Положим теперь $T = m\pi/\omega(0)$, где m — целое число, и перейдем к пределу $m\to\infty$. После подстановки (22) в (20) получаем при $m\to\infty$:

$$e^{i\vartheta_+} - e^{i\vartheta_-} = 1 + O\left(\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0}\frac{d\omega/dH}{\omega/H}\omega T\right). \tag{23}$$

Учитывая сказанное и подставляя (23) в (19), получаем выражение для изменения энергии в более удобном виде:

$$\Delta H(\overline{\Lambda}) = 2k^2|\Lambda_1|\sum_n n^2(n-1)|a_n|\cdot|a_{n-1}|\sin(\varphi-\theta) + O(kR\,e^{-2kR});$$

$$\Lambda_1 = |\Lambda_1|e^{i\varphi}; \quad a_p = |a_p|e^{i\theta_p} = |a_p|e^{ip\theta}. \tag{24}$$

С помощью формулы (24) находятся изменения других величин, характеризующих нелинейную периодическую волну:

$$\Delta u = \frac{du}{dH(\overline{\Lambda})}\Delta H(\overline{\Lambda}); \quad \Delta a_n = \frac{da_n}{dH(\overline{\Lambda})}\Delta H(\overline{\Lambda}),$$

которые также экспоненциально малы.

---

* Ограничение (21) в действительности может быть снято, если учесть, что эффективное изменение энергии волны $H(\overline{\Lambda})$ происходит на интервале длины $\sim R$, т. е. за время $T_0 \sim R/u$. Поэтому вместо (21) имеем неравенство $(\Lambda_1/\Lambda_0)\omega R/u \sim \sim kR\exp(-kR) \leqslant 1$, которое выполняется автоматически при $kR \gg 1$.

Чтобы убедиться в том, что полученный результат (24) имеет прямое отношение к адиабатическому инварианту волны, проделаем некоторые преобразования. Перепишем (11) в виде:

$$
\begin{gathered}
H(\overline{\Lambda}) = -{}^1\!/_2 \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} dx\,(\overline{\Lambda} v_x^2 + {}^1\!/_3 v^3) = -{}^1\!/_2 \overline{\Lambda} k I - {}^1\!/_6 C; \\
I = \frac{1}{2\pi} \oint v_x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \oint v' dv; \quad C = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} v^3 dx,
\end{gathered}
\tag{25}
$$

где интегрирование в I ведется по периоду волны и штрих означает дифференцирование по аргументу $x - ut$. Величина I является адиабатическим инвариантом волны. Поскольку C является функцией только k и $H(\overline{\Lambda})$, то из (25) следует, что

$$
\Delta I = -\frac{2}{k\overline{\Lambda}} \left(1 + \frac{1}{6} \frac{\partial C}{\partial H(\overline{\Lambda})}\right) \Delta H(\overline{\Lambda}).
$$

Это выражение является конечным результатом и определяет изменение адиабатического инварианта волны в слабо неоднородной среде. Величина $\partial C / \partial H(\overline{\Lambda})$ порядка единицы, а $\Delta H(\overline{\Lambda})$ согласно (24) пропорциональна Λ_1 и, следовательно, ΔI экспоненциально мало.

Рассмотрим некоторые приложения полученных результатов.

1. Пусть периодическое решение уравнения (1) имеет очень большую длину волны ($k \to 0$, но $kR \gg 1$). Удобно ввести число N, характеризующее эффективное число гармоник в разложении (5). Как известно, в этом случае

$$
a_n \approx 3u / N \quad (n \lesssim N); \qquad a_n \sim \exp(-n / N) \quad (n > N).
$$

При $k \to 0$ число гармоник $N \gg 1$, причем $N = \frac{1}{k}\sqrt{3u/\overline{\Lambda}}$. Формула (24) в этом случае упрощается:

$$
\Delta H(\overline{\Lambda}) \approx {}^{27}\!/_2\, u^3 \frac{|\Lambda_1|}{\overline{\Lambda}} \sin(\varphi - \theta). \tag{26}
$$

Особенностью выражения (26) является отсутствие зависимости от k. Поскольку $H(\overline{\Lambda}) \propto k$, то это означает, что неравенство $\Delta H(\overline{\Lambda}) / H(\overline{\Lambda}) \ll 1$, необходимое для применимости теории возмущений, при $k \to 0$ может перестать выполняться еще до того, как величина kR станет порядка единицы.

2. Рассмотрим случай возмущения в виде движущегося профиля: $\Lambda = \Lambda(x - u_\Lambda t)$. Произведя в (1) замену переменных $y = x - u_\Lambda t$, $t = t$, получаем

$$
v_t - u_\Lambda v_y + v v_y + \Lambda(y) v_{yyy} = 0, \tag{27}
$$

и задача сводится к уже рассмотренной с некоторыми переобозначениями. В частности, вместо решения $v(x - ut)$ для уравнения (1) следует рассматривать $v = v(y - (u - u_\Lambda)t)$ для уравнения (27).

Выражаю благодарность Ю. Мозеру за предоставленную возможность ознакомиться с его результатами по сохранению адиабатического инварианта нелинейной периодической волны.

Новосибирский государственный университет

Поступило 24 X 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Крускал, Адиабатические инварианты, ИЛ, 1962. [2] А. М. Дыхне. ЖЭТФ, 38, 570 (1960). [3] В. Л. Покровский, И. М. Халатников, ЖЭТФ, 40, 1713 (1961). [4] В. И. Арнольд, УМН, 18, 91 (1963). [5] J. K. Moser, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math. Phys., Kl. II, 1, 1 (1962). [6] J. K. Moser, Averaging of Nonlinear Waves. Nonlinear Wave Propagation Seminar, Courant Inst., N. Y., 1968. [7] C. S. Gardner, G. K. Morikawa, Courant Inst. Rep. NYO-9082 (1960). [8] C. S. Gardner, C. H. Su, Ann. Rep., MATT-Q-24, Princeton (1969). [9] Г. М. Заславский, Н. Н. Филоненко, ЖЭТФ, 54, 1064 (1969).