Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 4

УДК 533.95

ГИДРОМЕХАНИКА

Член-корреспондент АН СССР Б. Б. КАДОМЦЕВ, В. И. ПЕТВИАШВИЛИ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН В СЛАБО ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

Как известно ([1–3]), широкий класс одномерных нелинейных волн в средах со слабой дисперсией (например, волны на мелкой воде, ионно-звуковые и магнитозвуковые волны в плазме и т. п.) описывается уравнением Кортевега-де-Вриза:

$$\partial u / \partial t + u\, \partial u / \partial x + \partial^3 u / \partial x^3 = 0. \tag{1}$$

Это уравнение описывает эволюцию нелинейной волны в системе координат, движущейся со скоростью распространения длинноволновых возмущений c (для определенности мы будем называть ее скоростью звука). Для волн на мелкой воде и для волн в плазме под u можно подразумевать возмущение скорости или давления (в простой волне они однозначно связаны между собой).

Уравнение (1) можно с равным успехом использовать как для сред с отрицательной дисперсией, когда фазовая скорость линейных волн уменьшается с увеличением волнового числа, так и для сред с положительной дисперсией, когда фазовая скорость возрастает с волновым числом. Вся разница состоит лишь в том, что в первом случае координата x отсчитывается в сторону распространения волны, а во втором — в обратную сторону ([2]).

Уравнение Кортевега-де-Вриза к настоящему времени хорошо изучено ([1–4]). В частности, показано, что в эволюции произвольных начальных возмущений $u(x, 0)$ важную роль играют специальные решения уравнения (1) типа уединенных волн или солитонов:

$$u = u_0(x, t) = af(\sqrt{a}(x - x_0)), \tag{2}$$

где a — амплитуда волны, $x = at$ — ее фаза, а функция $f(\xi)$, удовлетворяющая следующим из (1) уравнениям:

$$-f' + ff' + f''' = 0; \qquad -f + {}^1/_2 f^2 + f'' = 0 \tag{3}$$

(штрих означает производную по ξ), равна

$$f(\xi) = 3(\operatorname{ch} \xi / 2)^{-2}. \tag{4}$$

Солитон представляет собой одномерную нелинейную волну, в предположении одномерности он является вполне устойчивым образованием. Однако остается открытым вопрос о том, сохраняется ли устойчивость солитона при слабом искривлении, когда его амплитуда a и фаза x_0 являются медленно меняющимися функциями координаты y, отсчитываемой поперек распространения солитона. Возможность развития неустойчивости типа самофокусировки у периодических нелинейных волн указывает на необходимость исследования аналогичного эффекта и в случае уединенной волны.

При нарушении строгой одномерности уравнение (1) возмущается, и если зависимость от координаты y является медленной, то это возмущение можно учесть, добавляя в уравнение (1) малое слагаемое $\partial\varphi / \partial y$:

$$\partial u / \partial t + u\, \partial u / \partial x + \partial^3 u / \partial x^3 = \partial\varphi / \partial y. \tag{5}$$

Вид возмущения легко установить, рассматривая предельный случай плоской волны малой амплитуды $u = \exp(-i\omega t + i\mathbf{kr})$ с малой длиной волны вдоль x, $k_x \ll 1$, когда вторым и третьим слагаемыми в (5) можно пренебречь. Для такой волны при отрицательной дисперсии частота колебаний в используемой нами системе координат, движущейся вдоль оси x со скоростью c, равна $\omega = kc - k_x c = c\left(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} - k_x\right) \cong \frac{c}{2}\frac{k_y^2}{k_x}$, а для волны с положительной дисперсией, поскольку в этом случае x отсчитывается против волны, $\omega = -kc + k_x c \cong -\frac{c}{2}\frac{k_y^2}{k_x}$. Отсюда видно, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \mp\frac{c}{2}\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{6}$$

где верхний знак относится к отрицательной, а нижний — к положительной дисперсии.

Мы ограничимся далее линейным приближением, считая $\partial x_0 / \partial y \ll 1$ (при этом амплитуда колебаний фазы x_0 может быть все же значительно больше ширины солитона $\sim 1/\sqrt{a}$). Но даже в линейном приближении система уравнений (5), (6) достаточно сложна, и поэтому мы перейдем к предельному случаю очень больших длин волн вдоль y, когда $\partial x_0 / \partial y \ll \ll \sqrt{a / c} \ll 1$. В этом случае φ мало, и уравнения (5), (6) можно решать по методу Крылова — Боголюбова, т. е. введением медленно меняющихся переменных. Для этого в уравнении (5) вместо x введем переменную $\xi = \sqrt{a}(x - x_0)$ и запишем его в виде:

$$a^{3/2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(-u + \frac{u^2}{2a} + \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\right) = \sqrt{a}\frac{\partial u}{\partial\xi}\left(\frac{\partial x_0}{\partial t} - a\right) - \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial t}\xi\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \tag{7}$$

где правую часть можно считать малой.

В нулевом приближении правую часть полагаем равной нулю и получаем $u = u_0 = af(\xi)$. В следующем приближении полагаем $u = u_0 + u_1$ и линеаризуем левую часть уравнения (7), а в правую часть подставляем u_0:

$$a^{3/2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(-u_1 + fu_1 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial\xi^2}\right) = a^{3/2}f'\left(\frac{\partial x_0}{\partial t} - a\right) - \frac{\partial a}{\partial t}z + \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \tag{8}$$

где $f' = df / d\xi$, $z = f + {}^1\!/_2\xi f'$, а φ следует найти из (6) с подстановкой $u = u_0$ в правую часть.

Будем считать $\partial / \partial t$ и $\partial / \partial y$ малыми порядка ε. Как мы увидим ниже, колебания фазы $x_0(y)$ значительно больше колебаний амплитуды a, так что переменную часть амплитуды $\tilde{a}$ следует считать малой порядка $\varepsilon\tilde{x}_0$. С точностью до членов порядка ε в правой части уравнения (8) следовало бы сохранить лишь первое слагаемое. При этом, как нетрудно проверить с помощью (3), из уравнения (8) мы нашли бы в качестве решения $u_1 = (\partial x_0 / \partial t - a)z$, где $z = f + {}^1\!/_2\xi f'$. Но пропорциональная z добавка к основному решению u_0 соответствует, как нетрудно видеть, небольшой вариации амплитуды солитона a. Без ограничения общности мы можем потребовать, чтобы эта добавка обращалась в нуль,— это будет соответствовать просто правильному выбору значения амплитуды. (Точно так же можно потребовать, чтобы обращалась в нуль часть возмущения $u_1 = \mathrm{const}\cdot f'$, являющаяся решением однородного уравнения (8), что соответствует правильному выбору фазы x_0.) Таким образом, с точностью до малых второго порядка по ε имеем

$$\partial x_0 / \partial t = a. \tag{9}$$

В следующем приближении по ε нам достаточно учесть в φ_1 слагаемые лишь первого порядка малости φ_1, так что в линейном приближении

$\varphi_1 = \pm \frac{ca}{2} \frac{\partial x_0}{\partial y} f$. Следовательно, для поправки второго порядка малости u_2 имеем

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + a^{3/2} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(-u_2 + fu_2 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2}\right) = -\frac{\partial a}{\partial t} z \pm \frac{ca}{2} \frac{\partial^2 x_0}{\partial y^2} f. \tag{10}$$

Умножим уравнение (10) на f и проинтегрируем по ξ. При этом, как нетрудно проверить с учетом (3), интеграл от второго слагаемого в левой части (10) после интегрирования по частям обратится в нуль, и из условия малости $\partial u_2 / \partial t \sim \varepsilon^3$ следует с точностью до членов третьего порядка малости

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \pm \frac{2ca}{3} \frac{\partial^2 x_0}{\partial y^2}, \tag{11}$$

где множитель $^2/_3$ возник после усреднения по ξ (с учетом $\langle zf \rangle = {}^3/_4 \langle f^2 \rangle$). Из (11) видно, что колебания амплитуды действительно значительно меньше, чем колебания фазы $\tilde{x}_0$.

Функцию u_2 можно приближенно найти, если положить $u_2 = A(1 - z)$ и считать A медленно меняющейся функцией ξ, т. е. пренебречь ее высшими производными по ξ. В этом приближении с учетом (11) уравнение (10) принимает вид

$$(1 - z) \frac{\partial A}{\partial t} + a^{3/2} \frac{\partial A}{\partial \xi} = -\frac{1}{4} \frac{\partial a}{\partial t} (f + \xi f'). \tag{12}$$

Снаружи от солитона это уравнение описывает бегущую против ξ волну:

$$\partial A / \partial t + a^{3/2} \partial A / \partial \xi = 0, \tag{13}$$

так что $A = F(t - \xi a^{-3/2})$, где F — произвольная функция. В области солитона в уравнении (12) можно пренебречь производной от A по времени, и если в набегающем на солитон потоке возмущение отсутствует, то A, находится из (12) интегрированием по ξ с граничным условием $A = 0$ при $\xi = \infty$. В частности, слева снаружи от солитона получаем

$$A(t) = F(t) \cong -\frac{1}{4} \frac{\partial a}{\partial t} \sim \varepsilon^2.$$

Таким образом, при колебаниях солитона от него отходит назад длинноволновое возмущение типа бегущей волны с амплитудой, пропорциональной $\partial a / \partial t$.

Из уравнений (9), (11) находим уравнение для колебаний фазы солитона x_0:

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial t^2} = \pm \frac{2ca}{3} \frac{\partial^2 x_0}{\partial y^2}, \tag{14}$$

где амплитуду a в рассматриваемом нами приближении можно считать постоянной.

Из уравнения (14) видно, что в среде с положительной дисперсией (знак минус) солитон неустойчив по отношению к искривлению, и его малые возмущения будут нарастать со временем. Инкремент нарастания таких возмущений пропорционален корню квадратному из амплитуды, т. е. он достаточно велик.

В случае отрицательной дисперсии (знак плюс) уравнение (14) приводит к гармоническим колебаниям, и для решения вопроса об устойчивости или неустойчивости солитона следует учесть члены порядка ε^3. Для этого в уравнении (10) следует сохранить добавку второго порядка малости φ_2, удовлетворяющую соотношению

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} = -\frac{c}{2\sqrt{a}} \frac{\partial a}{\partial y} z. \tag{15}$$

Учитывая, что в набегающем на солитон потоке возмущение отсутствует, имеем $\varphi = 0$ при $\xi = +\infty$, и из (15) легко находим φ_2. Умножая снова (10) на f и интегрируя по ξ с сохранением малых членов $\partial u_2 / \partial t$ и $\partial \varphi_2 / \partial y$, можно убедиться, что малые добавки $\sim \varepsilon^3$ приводят к затуханию колебаний солитона.

Итак, мы показали, что в случае отрицательной дисперсии (например, для волн на мелкой воде) «изгиб» солитона приводит к упругим колебаниям со слабым затуханием. В случае положительной дисперсии солитон неустойчив по отношению к двумерным возмущениям типа его изгиба, и он вряд ли может существовать длительное время.

Если же в уравнении (1) нелинейный член имеет отрицательный знак, то ситуация обратная: солитоны в случае положительной дисперсии устойчивы, а в случае отрицательной — неустойчивы.

Поступило
9 II 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. J. Zabusky, M. D. Kruskal, Phys. Rev. Lett., 15, 240 (1965). [2] Ю. А. Березин, В. И. Карпман, ЖЭТФ, 51, 1557 (1966). [3] В. И. Карпман, ЖЭТФ, 52, 1657 (1967). [4] В. И. Карпман, В. П. Соколов, ЖЭТФ, 54, 1568 (1968).