Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 4

УДК 511 *МАТЕМАТИКА*

А. А. КАРАЦУБА

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЙ СДВИНУТЫХ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ В АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЯХ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 27 XI 1969)

После создания И. М. Виноградовым метода оценок тригонометрических сумм с простыми числами (см. [1]) появились работы [4, 5], в которых были получены необходимые и достаточные условия в терминах оценок тригонометрических сумм с простыми числами для справедливости квазиримановой гипотезы, а, следовательно, и для соответствующих законов распределения простых чисел. В этой статье изучаются вопросы, связанные с распределением чисел вида $p(p'+a)$, где p, p' — простые числа, в арифметических прогрессиях с растущей разностью D. Мы существенно пользуемся методом И. М. Виноградова.

Для того чтобы наиболее четко представить существо дела, мы здесь рассматриваем лишь самый простой случай поставленной задачи; верхняя граница для D может быть значительно увеличена (но не более, чем до $n^{\varkappa_1}$, где $\varkappa_1 = 1 / (2{,}5+\omega)$), что, однако, связано с усложнением доказательства теоремы.

Совершенно так же исследуется вопрос о распределении в арифметических прогрессиях чисел вида $(p^n+a)f(p')$, где p и p' — простые числа, f — многочлен с целыми коэффициентами. Кроме того, этим же методом можно решать задачи о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях «в среднем» и другие задачи.

Обозначения. $\omega \in (0, {}^1/_4]$; n — достаточно большое положительное число; D — простое число, $D \leqslant n^{\varkappa_0}$, где $\varkappa_0 = 1 / (4{,}6+\omega)$; $(a, D) = (l, D) = 1$; χ — характер Дирихле $\operatorname{mod} D$; $\alpha \in [({}^1/_2+\omega)\ln D / \ln n, 1 - 4{,}1 \ln D / \ln n]$; $n_1 \geqslant n^{1-\alpha}$; $n_2 \geqslant n^{\alpha}$; p, p' — простые числа;

$$\pi(x) = \sum_{p\leqslant x} 1; \quad \pi_2 = \pi_2(n_1, n_2, a, l) = \sum_{\substack{p(p'+a)\equiv l (\operatorname{mod} D)\\ p\leqslant n_1,\ p'\leqslant n_2}} 1;$$

$\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, не всегда одно и то же; $\psi_1(u)$ и $\psi_2(v)$ — некоторые функции u и v, причем $|\psi_1(u)| \leqslant u^{\varepsilon}$, $|\psi_2(v)| \leqslant v^{\varepsilon}$.

Теорема. *Существует абсолютная постоянная $\gamma > 0$ такая, что*

$$\pi_2 = \frac{1}{\varphi(D)}\pi(n_1)\pi(n_2) + O((n_1 n_2)^{1+\varepsilon} D^{-1-\gamma\omega^2}),$$

где константа в O зависит только от ω.

Лемма 1. *Пусть* $P = \prod_{p\leqslant H} p$; $Q = \prod_{H<p\leqslant N} p$; s_0 — *наибольшее целое число с условием* $H^{s_0} \leqslant N$; $\theta(x)$ — *произвольная функция x такая, что* $|\theta(x)| \leqslant 1$;

$$S = \sum_{p\leqslant N} \theta(p),$$

$$W_s = \sum_{d_1/P} \ldots \sum_{\substack{d_s/P\\ d_1\ldots d_s m_1\ldots m_s\leqslant N}} \sum_{m_1>0} \ldots \sum_{m_s>0} \mu(d_1)\ldots\mu(d_s)\,\theta(d_1\ldots d_s m_1\ldots m_s),$$

$$W_s' = \sum_{\substack{y_1/Q \\ y_1 \ldots y_s \leqslant N,\ \mu(y_1 \ldots y_s) = 0}} \ldots \sum_{y_s/Q} \theta(y_1 \ldots y_s).$$

Тогда при некоторых $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s_0}, \alpha_1', \ldots, \alpha_{s_0}', c$, *зависящих только от* s_0, *имеем*

$$S = \alpha_1 W_1 + \ldots + \alpha_{s_0} W_{s_0} + \alpha_1' W_1' + \ldots + \alpha_{s_0}' W_{s_0}' + cH.$$

Доказательство этой леммы такое же, как и леммы 10 работы (2).

Лемма 2. *Пусть* $N \geqslant D^{1/2+\omega}$; $(k, D) = 1$; χ — *неглавный характер* $\mathrm{mod}\, D$. *Тогда существует абсолютная постоянная* $\gamma > 0$ *такая, что*

$$S_N = \sum_{p \leqslant N} \chi(p + k) \ll N D^{-\gamma\omega^2},$$

где константа в знаке $\ll$ *зависит только от* ω.

Доказательство этой леммы см. в (3).

Лемма 3. *Пусть* $D \leqslant U < U_1 \leqslant 2U$, $D \leqslant V < V_1 \leqslant 2V$,

$$W = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \bmod D} \left| \sum_{\substack{U < u \leqslant U_1 \\ uv \leqslant N}} \sum_{V < v \leqslant V_1} \psi_1(u) \psi_2(v) \chi(uv) \right|.$$

Тогда

$$W \ll (UV)^{1+\varepsilon} D^{-1} \ll N^{1+\varepsilon} D^{-1}.$$

Доказательство теоремы. Имеем равенство

$$\pi_2 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \bmod D} \sum_{p \leqslant n_1} \sum_{p' \leqslant n_2} \chi(p(p' + a)) \bar{\chi}(l) =$$

$$= \frac{1}{\varphi(D)} \pi(n_1) \pi(n_2) + R + O(n_1 n_2 D^{-2}),$$

где

$$|R| \leqslant \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{p \leqslant n_1} \chi(p) \right| \left| \sum_{p \leqslant n_2} \chi(p + a) \right|.$$

Пользуясь леммой 2, получаем

$$|R| \ll n_2 D^{-\gamma\omega^2} T, \text{ где } T = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{p \leqslant n_1} \chi(p) \right|. \qquad (*)$$

Обозначая $N = n_1$, возьмем в лемме 1 $H = \max(N^{0,1}, \sqrt{D})$ и применим ее к внутренней сумме T. Получим неравенство

$$T \ll \sum_{1 \leqslant s \leqslant s_0} \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} (|W_s| + |W_s'|) + H,$$

причем $s_0 \leqslant 10$, а константа в знаке $\ll$ абсолютная.

Из определения сумм W_s' следует

$$\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} |W_s'| \ll N^{\varepsilon} \sum_{H < d \leqslant N} \sqrt{\frac{N}{d^2} \left(\frac{N}{Dd^2} + 1 \right)} \ll N^{1+\varepsilon} D^{-1}.$$

Осталось оценить $(1 \leqslant s \leqslant s_0)$

$$T_1 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} |W_s|.$$

Возьмем $c = 1/60$; применим лемму 5 книги (1), стр. 313 в той формулировке, которая дана в (2), стр. 492. Все делители $d | P$, $d \leqslant N$, распределим среди $\ll D = (\ln N)^{\ln \ln N / \ln(1+c)}$ совокупностей; кроме того, интервалы $0 < m_i \leqslant N$, $1 \leqslant i \leqslant s$, разобьем на $\ll \ln N$ интервалов вида $M_i < m_i \leqslant$

$\leqslant M_i' \leqslant 2M_i$. Получим $\leqslant D(\ln N)^s$ сумм T_2 вида

$$T_2 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{d_1} \ldots \sum_{m_s} \chi(d_1 \ldots d_s m_1 \ldots m_s) \right|,$$

где суммирование ведется по области $M_i < m_i \leqslant M_i'$, $\varphi_i < d_i \leqslant \varphi_i^{1+c}$, $i = 1, \ldots, s$, $m_1 \ldots m_s d_1 \ldots d_s \leqslant N$.

Достаточно рассмотреть случай $M_1 \ldots M_s(\varphi_1 \ldots \varphi_s)^{1+c} \geqslant ND^{-1/2}$, так как в противном случае тривиально имеем $T_2 \leqslant N^{1+\varepsilon}D^{-1}$.

Обозначим $M_1 \ldots M_s\varphi_1 \ldots \varphi_s = \Phi$; тогда: или а) $\Phi = \Phi_1 \cdot \Phi_2$, $\Phi_1 \geqslant D$, $\Phi_2 \geqslant D$, $\Phi_1 = M_{i_1} \ldots M_{i_r}\varphi_{j_1} \ldots \varphi_{j_k}$, или б) представление а) невозможно.

а) Полагая $u = m_{i_1} \ldots m_{i_r} d_{j_1} \ldots d_{j_k}$, $v = d_1 \ldots d_s m_1 \ldots m_s u^{-1}$, получим

$$T_2 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{\substack{U < u \leqslant U^* \\ uv \leqslant N}} \sum_{V < v \leqslant V^*} \psi_1(u)\psi_2(v)\chi(uv) \right|.$$

Разбивая интервалы изменения u и v на $\leqslant \ln N$ интервалов вида $U_1 < u \leqslant U_1' \leqslant 2U_1$, $V_1 < v \leqslant V_1' \leqslant 2V_1$ и замечая, что $U_1 \geqslant D$, $V_1 \geqslant D$, мы получим $\leqslant \ln^2 N$ сумм T_2', к каждой из которых применима оценка леммы 3. Таким образом, $T_2 \leqslant N^{1+\varepsilon}D^{-1}$.

б) В этом случае или 1) $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} M_i \geqslant \Phi D^{-1}$, или 2) $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} \varphi_i \geqslant \Phi D^{-1}$.

1) Пусть $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} M_i = M_1$, $u = m_1$, $v = m_2 \ldots m_s d_1 \ldots d_s$. Тогда $\Phi D^{-1} \leqslant M_1 < u \leqslant M_1'$, $uv = m_1 \ldots m_s d_1 \ldots d_s \leqslant \Phi(\varphi_1 \ldots \varphi_s)^c$; $\varphi_1 \ldots \varphi_s \leqslant D$; $v \leqslant D^{1+c}$; поэтому T_2 не превосходит $\leqslant \ln N$ сумм T_2' вида

$$T_2' = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{V_1 < v \leqslant V_1'} \psi_2(v)\chi(v) \sum_{M_1 < u \leqslant \min(M_1', Nv^{-1})} \chi(u) \right|.$$

Следовательно,

$$T_2' \leqslant D^{1+c}\sqrt{D}\ln D \leqslant N^{1+\varepsilon}D^{-1}, \qquad T_2 \leqslant N^{1+\varepsilon}D^{-1}.$$

2) Пусть $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} \varphi_i = \varphi_j = \varphi$; тогда

$$\varphi \geqslant \Phi D^{-1} \geqslant N^{1/(1+c)}D^{-1-1/2(1+c)}.$$

Положим $U = D^{1/2}$; тогда $U < \varphi' \leqslant UH$, $\varphi'\varphi'' = \varphi$, и

$$T_2 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{\varphi' < d' \leqslant \varphi'^{1+c}} \sum_{\varphi'' < d'' < \varphi''^{1+c}} \ldots \sum_{M_s < m_s \leqslant M_s'} \chi(d'd'' \ldots m_s) \right| =$$
$$(d', d'') = 1,\ d'd'' \ldots m_s \leqslant N$$

$$= \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{d \leqslant N} \mu(d)\chi(d^2) \sum_{\varphi' d^{-1} < d' \leqslant \varphi'^{1+c}d^{-1}} \chi(d') \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{\substack{\varphi'' d^{-1} < d'' \leqslant \varphi''^{1+c}d^{-1} \\ d'd'' \ldots m_s \leqslant Nd^{-2}}} \ldots \sum_{M_s < m_s \leqslant M_s} \chi(d'' \ldots m_s) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{d \leqslant \sqrt{D}} K(d) \right| + \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{d > \sqrt{D}} K(d) \right|, \qquad (**)$$

где

$$K(d) = \mu(d)\chi(d^2) \sum_{\substack{\varphi' d^{-1} < d' \leqslant \varphi'^{1+c} d^{-1} \\ d'd'' \ldots m_s \leqslant N d^{-2}}} \sum_{\varphi'' d^{-1} < d'' \leqslant \varphi''^{1+c} d^{-1}} \sum_{M_s < m_s \leqslant M'_s} \chi(d')\chi(d'' \ldots m_s).$$

Для второй суммы в последнем неравенстве имеем оценку

$$\leqslant \sum_{N \geqslant d > \sqrt{D}} \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} |K(d)| = \sum_{N \geqslant d > \sqrt{D}} \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \Big| \sum_{u \leqslant N d^{-2}}' \psi_1(u)\chi(u) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant N^{\varepsilon} \sum_{N \geqslant d > \sqrt{D}} \sqrt{\frac{N}{d^2}\left(\frac{N}{Dd^2} + 1\right)} \leqslant N^{1+\varepsilon} D^{-1}.$$

Рассмотрим теперь первую сумму в правой части (**). Слагаемые в $K(d)$ имеют вид $\chi(u)\chi(v)$, где $u = d'$, $v = d'' \ldots m_s$; разбивая интервалы изменения величин u и v на интервалы, как это мы делали выше, получим $\leqslant \ln^2 N$ сумм вида

$$\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \Big| \sum_{\substack{U < u \leqslant U_1 \\ uv \leqslant N d^{-2}}} \sum_{V < v \leqslant V_1} \psi_1(u)\psi_2(v)\chi(uv) \Big|, \qquad (***)$$

причем $U \geqslant \varphi' D^{-1/2} \geqslant D$; $V \geqslant \varphi'' D^{-1/2} \ldots M_s = D^{-1/2}\Phi\varphi'^{-1-c} \geqslant D$.

Применяя к (***) лемму 3, получим

$$|K(d)| \leqslant N^{1+\varepsilon} D^{-1} d^{-2}; \quad \sum_{d \leqslant \sqrt{D}}' |K(d)| \leqslant N^{1+\varepsilon} D^{-1}.$$

Следовательно, $T_2 \leqslant N^{1+\varepsilon} D^{-1}$. Итак, для T получили оценку

$$T \leqslant N^{1+\varepsilon} D^{-1}.$$

Из этой оценки и (*) следует утверждение теоремы.

Замечание 1. Если повторить доказательство теоремы, раскрывая смысл оценок с ε, то при некоторой абсолютной константе $c > 0$ получим

$$\pi_2 = \frac{1}{\varphi(D)} \pi(n_1)\pi(n_2) + O\left(n_1 n_2 e^{c(\ln\ln n_1 n_2)^2} D^{-1-\gamma\omega^1}\right).$$

Замечание 2. Можно получить асимптотическую формулу для π_2 при любом $D \geqslant 1$.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
20 XI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Виноградов, Избр. тр., Изд. АН СССР, 1952. [2] И. М. Виноградов, Изв. АН СССР, сер. матем., 30, в. 3, 481 (1966). [3] А. А. Карацуба, ДАН, 190, № 3(1970). [4] Ю. В. Линник, ДАН, 57, № 5, 435 (1947). [5] П. Туран, Изв. АН СССР, сер. матем., 11, 3, 197 (1947).