Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 6

УДК 511 *МАТЕМАТИКА*

А. Ф. ЛАВРИК

О НУЛЯХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 11 XII 1969)

Идея укороченных функциональных уравнений из ([1], [2]), составляющая основу теории различного рода равномерных по всем параметрам оценок функций Дирихле (см. ([3], [4])), может быть использована и для изучения местоположения нулей некоторых из этих функций. На этом пути, в частности, получается подробная картина аналитического аспекта проблемы о нулях периодических функций Дирихле.

В данной статье мы ограничиваемся формулировкой результатов для двух наиболее простых классов периодических функций Дирихле.

Именно, рассматриваем функции $Z(s)$, определяемые при $\operatorname{Re} s > 1$ рядами Дирихле

$$Z(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_n^{-s} \quad (1 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots) \tag{1}$$

с вещественными коэффициентами $a_0 \neq 0, a_1, a_2, \ldots$; мероморфные, с простым полюсом в точке $s = 1$; имеющие период $2\pi i / \ln q$ с произвольным $q > 1$ и функциональное уравнение

$$q^s Z(s) = q^{1-s} Z(1-s). \tag{2}$$

В частности, при q, равном степени простого числа, и специальных дополнительных ограничениях на последовательность коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ряда (1) $Z(s)$ — дзета-функции полей (второго рода) алгебраических функций над конечным полем констант ([5], [6]).

С помощью укороченного функционального уравнения, отвечающего уравнению (2) (случай уравнения (1) из ([7]) при $\varphi(s) = \psi(s) = Z(s)$, $\alpha_\nu = 0$, $\beta_\nu = 1$, $\lambda = 1$, $A = B = q$), получаем:

1°. Для всякого фиксированного значения $q > 1$ описанный класс функций $Z(s)$ состоит из несчетного множества представителей.

2°. $\operatorname*{res}_{s=1} Z(s) = (a_2 - a_0 q) / q(q-1) \ln q$, где a_0, a_2 — коэффициенты ряда (1).

3°. В полуплоскости $\operatorname{Re} s \geqslant 1/2$ нули $Z(s)$ располагаются на одной либо на двух вертикальных прямых.

4°. Местоположение нулей $Z(s)$ определяется с помощью простейших соотношений между параметром q и первыми тремя коэффициентами a_0, a_1, a_2 ее ряда Дирихле (1).

Теорема 1. *Пусть*

$$A = q + 1 - a_1 / a_0, \quad C = A^2 - 4(a_2 / a_0 - q - (q+1) a_1 / a_0),$$
$$B = \sqrt{|C|}.$$

I. *При* $C \geqslant 0$ *в полуплоскости* $\operatorname{Re} s \geqslant 1/2$ *имеем:*

1°. *Если*

$$|A - B| \leqslant 4\sqrt{q}, \quad |A + B| \leqslant 4\sqrt{q}, \tag{3}$$

то все нули $Z(s)$ *лежат на прямой* $\operatorname{Re} s = 1/2$ *и их ординаты* t_1, t_2 *вычисляются по формуле*

$$\cos t_\nu \ln q = [A + (-1)^\nu B] / 4\sqrt{q} \quad (\nu = 1, 2). \tag{4}$$

2⁰. *Если*

$$|A-B| \leqslant 4\sqrt{q}, \quad |A+B| > 4\sqrt{q}, \tag{5}$$

то $Z(s)$ *имеет нули на прямой* $\operatorname{Re} s = {}^1/_2$ *с ординатами* t, *определяемыми из равенства*

$$\cos t \ln q = (A-B) / 4\sqrt{q} \tag{6}$$

и нули на прямой $\operatorname{Re} s = \sigma > {}^1/_2$, *определяемой уравнением*

$$q^\sigma + q^{1-\sigma} = A + B \quad \text{или} \quad q^\sigma + q^{1-\sigma} = -(A+B), \tag{7}$$

в зависимости от того, $A + B > 0$ *или* $A + B < 0$, *с ординатами* t, *соответственно равными*

$$2\pi k / \ln q \quad \text{или} \quad \pi(2k+1) / \ln q \quad (k = 0, \pm 1, \ldots). \tag{8}$$

3⁰. *Если*

$$|A-B| > 4\sqrt{q}, \quad |A+B| \leqslant 4\sqrt{q}, \tag{9}$$

то $Z(s)$ *имеет нули на прямой* $\operatorname{Re} s = {}^1/_2$ *с ординатами* t, *определяемыми из равенства*

$$\cos t \ln q = (A+B) / 4\sqrt{q}, \tag{10}$$

и нули на прямой $\operatorname{Re} s = \sigma > {}^1/_2$, *где* σ — *корень уравнения*

$$q^\sigma + q^{1-\sigma} = A - B \quad \text{или} \quad q^\sigma + q^{1-\sigma} = B - A \tag{11}$$

в зависимости от того, $A > B$ *или* $A < B$, *с ординатами* t, *соответственно равными*

$$2\pi k / \ln q \quad \text{или} \quad \pi(2k+1) / \ln q \quad (k = 0, \pm 1, \ldots). \tag{12}$$

4⁰. *Если*

$$|A-B| > 4\sqrt{q}, \quad |A+B| > 4\sqrt{q}, \quad A \neq 0, \tag{13}$$

то нули $Z(s)$ *лежат на вертикалях* $\operatorname{Re} s = \sigma_1 > {}^1/_2$ *и* $\operatorname{Re} s = \sigma_2 > {}^1/_2$, *где* σ_1 *и* σ_2 — *корни уравнений:*

$$q^{\sigma_1} + q^{1-\sigma_1} = \pm(A-B) \quad \text{и} \quad q^{\sigma_2} + q^{1-\sigma_2} = \pm(A+B), \tag{14}$$

а ординаты, в зависимости от того

$$A - B > 0 \ \text{или} \ A - B < 0, \ \text{и} \ A + B > 0 \quad \text{или} \ A + B < 0, \tag{15}$$

будут равны соответственно

$$2\pi k / \ln q \quad \text{или} \quad \pi(2k+1) / \ln q \quad (k = 0, \pm 1, \ldots). \tag{16}$$

5⁰. *Если*

$$|A-B| > 4\sqrt{q}, \quad |A+B| > 4\sqrt{q}, \quad A = 0, \tag{17}$$

то все нули $Z(s)$ *лежат на одной прямой* $\operatorname{Re} s = \sigma > {}^1/_2$, *где* σ — *корень уравнения*

$$q^\sigma + q^{1-\sigma} = B, \tag{18}$$

а ординаты нулей равны

$$\pi k / \ln q \quad (k = 0, \pm 1, \ldots). \tag{19}$$

II. *При* $C < 0$ *в полуплоскости* $\operatorname{Re} s \geqslant {}^1/_2$ *имеем: все нули* $Z(s)$ *лежат в полуплоскости* $\operatorname{Re} s = \sigma > {}^1/_2$, *причем их абсцисса* σ *и ординаты* t *суть корни следующей системы уравнений:*

$$2(q^\sigma + q^{1-\sigma}) \cos t \ln q = A, \quad 2(q^\sigma - q^{1-\sigma}) \sin t \ln q = B.$$

III. *Все перечисленные выше ситуации расположения нулей функций* $Z(s)$ *фактически встречаются и являются единственно возможными.*

IV. *Существует прием, позволяющий строить функции $Z(s)$, реализующие любую из указанных выше ситуаций расположения нулей.*

Обратная теорема. 1°. *Если все нули $Z(s)$ лежат на прямой* $\operatorname{Re} s = 1/2$, *то справедливы соотношения* (3), (4) *и* $C \geqslant 0$.

2°. *Если $Z(s)$ имеет нули на прямой* $\operatorname{Re} s = 1/2$ *и на прямой* $\operatorname{Re} s = \sigma > 1/2$, *то справедливы утверждения в виде* (5) — (8) *или* (9) — (12), *в зависимости от того*

$$|A+B| > |A-B| \quad \text{или} \quad |A+B| < |A-B| \quad \text{и } C > 0.$$

3°. *Если нули $Z(s)$ лежат на двух разных прямых, расположенных правее* $\operatorname{Re} s > 1/2$, *то имеют место утверждения в виде* (13) — (16).

4°. *Если нули $Z(s)$ лежат на одной прямой* $\operatorname{Re} s = \sigma > 1/2$, *то справедливы утверждения в виде* (17) — (19).

Следствие. *Аналог гипотезы Римана о нулях имеет место для тех и только тех из функций $Z(s)$, для которых первые три коэффициента их рядов Дирихле* (1) *и параметр q удовлетворяют неравенствам*

$$C \geqslant 0, \quad |A-B| \leqslant 4\sqrt{q}, \quad |A+B| \leqslant 4\sqrt{q}.$$

Если $C \geqslant 0$, но по крайней мере одно из двух последних неравенств не выполняется, то соответствующая функция $Z(s)$ имеет вещественный («зигелевский») нуль, либо нуль с ординатой $t = \pi / \ln q$, лежащие правее прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$.

Пусть, далее, $Z^*(s)$ — функция Дирихле, отличающаяся от $Z(s)$ тем, что вместо функционального уравнения (2) она удовлетворяет уравнению

$$Z^*(s) = Z^*(1-s).$$

Такого рода класс функций Дирихле также состоит из несчетного множества представителей при любом фиксированном $q > 1$. В частности, он включает в себя дзета-функции эллиптических функциональных полей [8, 9]. Относительно расположения нулей $Z^*(s)$ имеет место

Теорема 2. 1°. *Все нули функции $Z^*(s)$ лежат на прямой* $\operatorname{Re} s = 1/2$ *тогда и только тогда, когда первые два коэффициента ее ряда Дирихле* (1) *удовлетворяют неравенству*

$$|a_1 / a_0 - q - 1| \leqslant 2\sqrt{q}, \tag{20}$$

причем ординаты нулей t вычисляются по формуле

$$\cos t \ln q = [a_1 - a_0(q+1)] / 2a_0\sqrt{q}.$$

2°. *Если неравенство* (20) *не выполняется, то функция $Z^*(s)$ имеет вещественный («зигелевский») нуль либо нуль с ординатой $t = \pi / \ln q$, лежащие в полуплоскости* $\operatorname{Re} s > 1/2$.

3°. *Можно фактически указать сколько угодно функций $Z^*(s)$, для которых справедливо утверждение* 1° *и с любым* $1/2 < \operatorname{Re} s < 1$ *утверждение* 2° *для всякого* $q > 1$.

Ташкентский институт
инженеров железнодорожного транспорта
Ташкент

Поступило
11 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Ф. Лаврик, ДАН, 171, № 2 (1966). [2] А. Ф. Лаврик, Изв. АН СССР, сер. матем., 31, № 2 (1967). [3] А. Ф. Лаврик, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, № 1 (1968). [4] А. Ф. Лаврик, Матем. заметки, 2, в. 5 (1967). [5] F. K. Schmidt, Math. Zs., 41, 415 (1936). [6] A. Weil, Publ. Inst. Math. Strasbourg, N. S., № 2 (1948). [7] А. Ф. Лаврик, Матем. заметки, 3, в. 5 (1968). [8] E. Artin, Math. Zs., 19, 1 (1924). [9] H. Hasse, Abh. math. Sem. Univ. Hamburg, 10 (1934).