Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 6

УДК 530.12:531.51

ФИЗИКА

Н. В. МИЦКЕВИЧ, И. ПУЛИДО ГАРСИЯ

О ДВИЖЕНИИ ПРОБНЫХ МАСС В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

(Представлено академиком В. А. Фоком 17 XII 1969)

Как известно, статическое гравитационное поле массивного вращающегося тела содержит компоненты, аналогичные компонентам магнитного поля кольцевого тока (на больших расстояниях), сказывающиеся на движение пробных тел, приводя к эффектам, впервые рассмотренным Ленземи Тиррингом [1], в частности к специфической прецессии орбиты пробного тела. Эти эффекты иногда связывают с принципом Маха (см., например, [2]), согласно которому при вращении массивного тела вблизи него должна частично вовлекаться во вращение локальная инерциальная система. Иными словами, следует ожидать, что при прочих равных условиях угловая скорость движения пробного тела около вращающейся массы должна быть больше (если ее вектор совпадает по направлению с вектором момента импульса этой массы), чем угловая скорость противоположного направления. Этот эффект можно связать с аналогом эффекта Зеемана, указанным в теории тяготения Зельдовичем [3], хотя в эффекте Зеемана речь идет обычно о внешнем магнитном поле, а не о магнитном поле ядра, тогда как здесь притягивающий центр служит одновременно источником квазимагнитного гравитационного поля. Наиболее значительным этот эффект должен быть, когда лензе-тирринговская частота близка к частоте нулевого приближения (ньютоновской), однако практически она является лишь малой поправкой. Итак, в простейшем случае движения двух пробных масс навстречу друг другу по одной и той же круговой экваториальной орбите их периоды обращения должны быть различны. Ввиду этого точка их встречи должна дрейфовать в направлении вращения центрального тела. Обозначая угловые скорости движения пробных масс через $\dot\varphi_+$ и $\dot\varphi_-$ и взяв для определенности $\dot\varphi_+ > 0 > \dot\varphi_-$, можно записать условие встречи в виде $t(\dot\varphi_+ - \dot\varphi_-) = 2\pi n$, где n — целое число ($n = 0$ соответствует первоначальной встрече, $n = 2$ — встрече после одного оборота); t — время, прошедшее от момента первоначальной встречи. Полагая $n = 2$, найдем смещение места встречи за один оборот:

$$\delta = 4\pi\dot\varphi_+ / (\dot\varphi_+ - \dot\varphi_-) - 2\pi = 2\pi(\dot\varphi_+ + \dot\varphi_-) / (\dot\varphi_+ - \dot\varphi_-).$$

Отсюда следует эффективная величина дрейфа места встречи за единицу времени (в радианах)

$$\delta / T = (\dot\varphi_+ + \dot\varphi_-) / 2.$$

Мы будем исходить здесь из точного решения для внешнего гравитационного поля вращающейся симметричной массы, полученного Керром [4] (см. также [5]),

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\gamma mr}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right) dx^{0 2} - \frac{r^2 + a^2\cos^2\theta}{r^2 - 2\gamma mr + a^2} dr^2 -$$
$$- \frac{4\gamma Lr\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta} d\varphi\, dx^0 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2\gamma\, ma^2 r\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right)\sin^2\theta d\varphi^2 -$$
$$- (r^2 + a^2\cos^2\theta)\, d\theta^2$$

(скорость света $c = 1$; m — масса тела; L — его момент импульса; γ —

ньютоновская гравитационная постоянная; $am = L$), хотя в разумном приближении результаты будут, конечно, справедливы и для известного приближенного решения уравнений Эйнштейна (см., например, [6]). Радиальная составляющая уравнения геодезической в форме

$$\frac{d}{ds}\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^{\nu}}{ds}\right) = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta,\,\mu}\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds}$$

в предположении круговой экваториальной орбиты дает

$$g_{00,\,r}\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 + g_{\varphi\varphi,\,r}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + 2g_{0\varphi,\,r}\frac{dx^0}{ds}\frac{d\varphi}{ds} = 0.$$

Отсюда следуют два точных решения для угловых скоростей движения пробных масс (встречное движение):

$$\left(\frac{d\varphi}{dx^0}\right)_{\pm} = \frac{-g_{0\varphi,\,r} \mp \sqrt{(g_{0\varphi,\,r})^2 - g_{00,\,r}g_{\varphi\varphi,\,r}}}{g_{\varphi\varphi,\,r}}.$$

Эти угловые скорости можно представить в форме

$$\dot{\varphi}_{\pm} = \frac{\pm\sqrt{\gamma m/r} + \gamma L/c^2r^2}{r - \gamma ma^2/c^4r^2} = \frac{\pm 1}{\sqrt{r^3/\gamma m} \mp L/mc^2},$$

а период обращения пробной массы — в форме

$$T_{\pm} = 2\pi\left(\sqrt{\frac{r^3}{\gamma m}} \mp \frac{L}{mc^2}\right).$$

Обозначим, кроме того,

$$T_N = \frac{T_+ + T_-}{2} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\gamma m}}, \quad \Delta T = \frac{T_- - T_+}{2} = 2\pi\frac{L}{mc^2}.$$

Приведенные выражения являются точными, а не приближенными, но следует помнить, что в них фигурирует координатное время. Однако нетрудно показать, пользуясь, например, формализмом Зельманова [7], что физически наблюдаемые величины не будут существенно отличаться от координатных в разумном приближении. Полученная поправка к периоду ΔT, обусловленная вращением центрального тела, обладает некоторыми неожиданными свойствами. Прежде всего, она не зависит от радиуса орбиты и, более того, не содержит гравитационной постоянной, так что ее структуру можно было бы предвидеть из одних лишь соображений размерности (отношение момента импульса к энергии). Кроме того, указанное отношение фактически не зависит от величины массы центрального тела, а только от его геометрии и угловой скорости. Этот факт, однако, не парадоксален, если иметь в виду, что реально смысл периода имеет лишь сумма $T_N \pm \Delta T$, первый член которой явно зависит от перечисленных факторов. Тогда, например, при стремлении к нулю массы центрального тела главная часть периода T_N неограниченно возрастает, так что в пределе добавка ΔT теряет всякий смысл. Добавка же к угловой скорости во всех случаях соответствует частоте Лензе — Тирринга.

Полагая радиус орбиты пробного тела $r = 3^{1/3}R$ (R — радиус притягивающего центра), найдем, что величина дрейфа места встречи за один оборот равна $\delta = 2\pi\Delta T / T_N$ и (эффективно) за единицу времени $\delta / T = 2\pi\Delta T / T_N^2$. Тем самым теория действительно предсказывает планетарный гравитационный эффект Зеемана (иначе — эффект частичного увлечения «инерциальной системы»). Мы приводим табл. 1, иллюстрирующую величину эффекта для некоторых случаев.

Мы видим, что уже в рамках Солнечной системы величина дрейфа места встречи δ / T может на порядок превышать эффект поворота перигелия

Таблица 1

Объект (центральное тело)					Пробные массы, $r = 3^{1/2}R$				
Название объекта	m, г	R, см	ω, сек$^{-1}$	L, $\frac{\text{г}\cdot\text{см}^2}{\text{сек}}$	T_N, сек	ΔT, сек *	δ, сек. дуги	$\frac{\delta}{T}$ **	$\frac{\Delta\, Sch}{T}$ **
Солнце	$2\cdot 10^{33}$	$7\cdot 10^{10}$	$3{,}2\cdot 10^{-6}$	$1{,}3\cdot 10^{49}$	$1{,}7\cdot 10^{4}$	$4{,}5\cdot 10^{-5}$	$3{,}3\cdot 10^{-3}$	600	10^{6}
Земля	$6\cdot 10^{27}$	$6{,}4\cdot 10^{8}$	$7{,}2\cdot 10^{-5}$	$7{,}1\cdot 10^{40}$	$8{,}8\cdot 10^{3}$	$8{,}3\cdot 10^{-8}$	$1{,}2\cdot 10^{-6}$	4,4	670
Юпитер	$1{,}9\cdot 10^{30}$	$7{,}1\cdot 10^{9}$	$1{,}8\cdot 10^{-4}$	$6{,}7\cdot 10^{45}$	$1{,}8\cdot 10^{4}$	$2{,}5\cdot 10^{-5}$	$2{,}5\cdot 10^{-4}$	280	10^{4}
Быстро вращающаяся звезда	$3\cdot 10^{34}$	$3{,}5\cdot 10^{11}$	$1{,}5\cdot 10^{-4}$	$2\cdot 10^{53}$	$5\cdot 10^{4}$	$4{,}7\cdot 10^{-2}$	1,21	$7{,}6\cdot 10^{4}$	10^{6}
Нейтронная звезда	10^{33}	10^{6}	10^{4}	$4\cdot 10^{48}$	$1{,}3\cdot 10^{-3}$	$2{,}8\cdot 10^{-8}$	$2{,}5\cdot 10^{4}$	93 $\frac{\text{рад}}{\text{сек}}$	750 $\frac{\text{рад}}{\text{сек}}$

* Одинаково для всех r.
** В секундах дуги в столетие.

Меркурия, хотя, конечно, такой эффект поворота перигелия для рассмотренных орбит (если бы их эксцентриситет был отличен от нуля) в соответствующих случаях превышает величину эффекта дрейфа (см. последний столбец таблицы). Однако оба эффекта — и обязанный вращению центрального тела, и связанный со шварцшильдовской частью его гравитационного поля — приближаются друг к другу по порядку величины для быстро вращающихся звезд (звезды классов A, O и особенно B; пример предельно быстро вращающейся нейтронной звезды взят из работы ([3]), причем следует заметить, что известные пульсары обладают угловыми скоростями вращения, меньшими на два и более порядков).

Авторы благодарят участников теоретических семинаров Астрономического института им. Штернберга Московского университета и Университета дружбы народов им. П. Лумумбы за плодотворное обсуждение и А. Л. Зельманова и В. А. Фока — за интерес к работе.

Университет дружбы народов
им. Патриса Лумумбы
Москва

Поступило
13 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Lense, H. Thirring, Phys. Zs., 19, 156 (1918). [2] Г. Хёнль, Эйнштейновском сборн., «Наука», 1968, стр. 258. [3] Я. Б. Зельдович, Письма ЖЭТФ, 1, 40 (1965). [4] R. P. Kerr, Phys. Rev. Letters, 11, 237 (1963). [5] V. De La Cruz, W. Israel, Phys. Rev., 170, 1187 (1968). [6] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, «Наука», 1967. [7] А. Л. Зельманов, ДАН, 107, 815 (1956).