Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 1

УДК 517.947 МАТЕМАТИКА

Б. Н. ХИМЧЕНКО

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ М. В. КЕЛДЫША И М. А. ЛАВРЕНТЬЕВА

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 6 X 1969)

Центральным результатом работы ([1]) является теорема 2, из которой немедленно вытекает единственность (с точностью до постоянной) решения задачи Неймана. Эта теорема формулируется следующим образом.

Пусть $u(M)$ — функция, гармоническая в некоторой области T трехмерного эвклидова пространства, отлична от постоянной, и пусть в точке M_0 границы ∂T $u(M)$ имеет единственное предельное значение u_0, равное нижней границе ее значений в T.

Если в T можно вписать тело, конгруентное параболоиду $z_0 \geqslant z \geqslant \rho^{1+\alpha}$ $(\alpha > 0;\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2})$ с вершиной в M_0, то

$$\lim_{r_{10}\to 0} \frac{u(M_1) - u_0}{r_{10}} > 0,$$

где M_1 — точка оси параболоида, r_{10} — расстояние от M_1 до M_0.

Введем теперь в рассмотрение функцию $\varphi(t)$ $(t \in [0, t_0])$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\varphi(t) \in C^{(1)}([0, t_0]) \cap C^{(\infty)}((0, t_0]); \tag{1}$$

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0; \tag{2}$$

$$\varphi'(t) > 0,\ \varphi''(t) > 0 \text{ в } (0, t_0); \tag{3}$$

$$\int_0^{t_0} \frac{\varphi(t)\,dt}{t^2} < \infty. \tag{4}$$

Назовем φ-параболоидом тело $z_0 \geqslant z \geqslant \varphi(\rho)$ $\left(\rho = \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\right)^{1/2}\right)$.

Построением нижнего барьера можно доказать, что теорема 2 остается справедливой в области $(T + \partial T)$ n-мерного эвклидова пространства, точки M_0 границы которой можно коснуться изнутри φ-параболоидом. В качестве такого барьера служит субгармоническая функция

$$\Psi_1(M) = z \exp\left[\lambda_1 \int_0^z \frac{\varphi(t)\,dt}{t^2}\right] - \lambda_2 \varphi(r),$$

где $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$, λ_i (здесь и в дальнейшем λ_i — положительные константы).

В то же время теорема 2 не выполняется в некоторых областях $(T + \partial T) \in A^{(1)}$.

Действительно, определим гармоническую функцию $u(M)$ в φ-параболоиде, причем $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям (1) — (3), но

$$\int_0^{t_0} \frac{\varphi(t)\,dt}{t^2} = \infty.$$

Кроме того, $u(M)$ должна достигать минимального значения u_0 в некоторой окрестности M_0. Тогда на оси Oz

$$u(M_1) - u_0 \leqslant \lambda_3 z \exp\left[-\lambda_4 \int\limits_z^z \frac{\varphi(t)\,dt}{t^2}\right].$$

В качестве верхнего барьера здесь предлагается супергармоническая функция

$$\Psi_2(M) = \exp\left[-\lambda_4 \int\limits_r^{r_0} \frac{\varphi(t)\,dt}{t^2}\right](\lambda_5 z - \varphi(r)).$$

Приношу искреннюю благодарность участникам семинара А. Н. Тихонова за внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
25 IX 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев, ДАН, 16, № 3 (1937).