Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 4

УДК 519

МАТЕМАТИКА

В. М. МАКСИМОВ

К ТЕОРИИ ДИСПЕРСИЙ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НА КОМПАКТНЫХ ГРУППАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 21 XI 1969)

Роль понятия дисперсии в классической теории вероятностей общеизвестна. В частности, оно незаменимо при исследовании вопросов, связанных с суммированием независимых случайных величин. При рассмотрении аналогичных задач на компактных группах выражение каких-либо свойств сходимости через числовые характеристики распределений также привлекательно, в особенности, если учесть нетривиальность умножения в некоммутативных группах по сравнению с обычным сложением действительных чисел.

Пусть G — произвольная компактная группа. Обозначим $\mathfrak{M}$ совокупность всех борелевских мер на G. Меры, сосредоточенные на элементах G, мы обозначаем самими же элементами и называем часто сдвигами. e_1, — как всегда, единица в любых встречающихся группах. Инвариантная мера на подгруппе g, $g \subseteq G$, обозначается n_g. Рассматривая операцию композиции мер как умножение в $\mathfrak{M}$, получим, что $\mathfrak{M}$ есть компактная ассоциативная полугруппа.

Выделим теперь минимум необходимых свойств, которыми должна обладать дисперсия, с тем, чтобы получить в общем виде условия сходимости композиции мер, и с тем, чтобы, исходя из этих свойств, можно было описать общую конструкцию дисперсий для полугруппы мер $\mathfrak{M}$. Для удобства мы принимаем мультипликативную форму дисперсии (к привычной аддитивной форме можно, очевидно, перейти логарифмированием). Описание дисперсий для мер на конечных группах дано в [1].

Определение. Пусть E — замкнутая полугруппа мер, содержащая левые и правые сдвиги, $E \subseteq \mathfrak{M}$. Любую действительную функцию D на E мы называем *дисперсией для распределений* из E, если выполнены следующие условия:

1°. $0 \leqslant D(\mu) < \infty$ для всех $\mu \in E$ и $D \not\equiv \mathrm{const}$.

2°. D непрерывна, т. е. $D(\mu_n) \to D(\mu)$, если $\mu_n \to \mu$ слабо, μ_n, $\mu \in E$.

3°. $D(\nu\mu) = D(\nu)D(\mu)$ для всех μ, $\nu \in E$.

4°. $D(n_g) = 0$ для всех инвариантных мер из E, где $g \neq e_1$.

Следующие важные свойства дисперсий вытекают из пп. 1° — 4°.

а) $D(e_1) = 1$. Действительно, в силу 1°, $D \not\equiv 0$. Поэтому найдется такая мера μ, $\mu \in E$, что $D(\mu) \neq 0$. Но тогда из 3° получим: $D(\mu) = D(\mu e_1) = D(\mu)D(e_1) \neq 0$, откуда $D(e_1) = 1$.

б) $D(\alpha) = 1$ для любого $\alpha \in G$. Рассмотрим множество $\overline{\{\alpha^n\}}$, $n = \overline{1, \infty}$. Это будет коммутативная подгруппа G. Поэтому существует такая последовательность n_i, что $\alpha^{n_i} \to e_1$ при $n_i \to \infty$. В силу 2° — 3° и а) будет $D(\alpha)^{n_i} = D(\alpha^{n_i}) \to D(e_1) = 1$. Следовательно, $D(\alpha) = 1$.

в) $D(\mu) \leqslant 1$ для всех $\mu \in E$. Если $D(\mu) = 1$, то мера μ сосредоточена на одном элементе G.

Действительно, в силу основного результата [2] следует, что найдутся такие элементы α_n группы G, что $\mu^n\alpha_n \to n_g$. Если μ не сосредоточена на одном элементе G, то $g \neq e_1$. Тогда в силу 2° — 4° и б) имеем: $D(\mu)^n = D(\mu^n) = D(\mu^n \cdot \alpha_n) \to D(n_g) = 0$, т. е. $D(\mu) < 1$. Если μ сосредоточена на одном элементе G, то в силу б) $D(\mu) = 1$.

Если $\mu \in E$ есть распределение случайной величины ξ, то положим $D(\xi) = D(\mu)$. Свойства $D(\xi)$, очевидно, вытекают из $1^0 - 4^0$.

Дадим теперь применение понятия дисперсии к характеризации одного свойства последовательности мер $\{\mu_n\}$. Про последовательность $\{\mu_n\}$ скажем, что она типа e_1, если любая последовательность $\mu_{n_i} \ldots \mu_{n_i+m_i}$ $m_i \geqslant 0$, при $n_i \to \infty$ имеет предельными точками лишь сдвиги. Последовательность независимых случайных величин называется типа e_1, если соответствующая им последовательность мер типа e_1. Если независимые величины на G, $\{\xi_n\}$ типа e_1, то можно показать, что найдутся элементы α_n из G такие, что для последовательности $\{\xi_n'\}$, где $\xi_n' = \alpha_n^{-1}\xi_n\alpha_{n+1}$, произведение $\xi_i' \ldots \xi_n'$ будет сходиться почти всюду при $n \to \infty$ для любого i. Таким образом, для выяснения сходимости почти всюду необходимо знать тип последовательности.

Предложение 1. *Пусть меры $\{\mu_n\}$ принадлежат E. Для того чтобы последовательность $\{\mu_n\}$ была типа e_1, необходимо и достаточно сходимости ряда $\Sigma(1 - D(\mu_n))$. (Для достаточности предполагается сходимость ряда хотя бы при некоторой одной дисперсии.)*

Для произвольных некоммутативных групп легко указать полугруппы мер из $\mathfrak{M}$, для которых можно определить дисперсию. Однако этого уже нельзя сделать для всей $\mathfrak{M}$, определенной на произвольной компактной группе G.

Предложение 2. *Если компактная группа G бесконечномерна или нульмерна, но содержит бесконечное число элементов, то на полугруппе мер $\mathfrak{M}$ не существует дисперсии.*

Доказательство. Группы, указанные в предложении, в любой окрестности единицы содержат подгруппы ([3]). Поэтому найдется последовательность подгрупп g_i, $g_i \neq e_1$, стягивающихся к e_1. Следовательно, $n_{g_i} \to e_1$ слабо. Предположим теперь, что в $\mathfrak{M}$ определена некоторая дисперсия D. Тогда, по свойству 4^0, $D(n_{g_i}) = 0$, а по свойству непрерывности D, $\lim\limits_{i\to\infty} D(n_{g_i}) = D(e_1) = 1$, что противоречит а).

Из предложения 2 видно, что компактные группы, допускающие обобщение понятия дисперсии,— либо конечные группы, либо конечномерные, которые являются группами Ли ([3]). Поскольку в ([1]) дисперсии мер на конечных группах описаны, мы дадим общий вид и свойства дисперсий всех распределений на компактных группах Ли.

Для дальнейшего будет полезно понятие слабой дисперсии. Так мы называем функцию D на $\mathfrak{M}$, удовлетворяющей только первым трем условиям в определении дисперсии. Будет показано, что все дисперсии строятся из слабых дисперсий.

Предложение 3. *Пусть G — произвольная компактная группа. Если D — слабая дисперсия на $\mathfrak{M}$ группы G, то существует нормальный делитель N группы G, для которого $D(n_N) = 1$ и всякая подгруппа g, для которой $D(n_g) = 1$, включается в N.*

Для доказательства этого предложения можно воспользоваться той же схемой, что и при доказательстве аналогичного утверждения в ([1]). Для этого нужно лишь применить лемму Цорна.

Подгруппу N мы будем называть ядром слабой дисперсии. Слабую дисперсию с ядром N обозначим D_N. Поэтому дисперсию можно рассматривать как слабую дисперсию с ядром e_1.

Лемма 1. *Если носитель некоторой меры ν включается в N, то $D_N(\nu) = 1$.*

Действительно, поскольку носитель ν включается в N, то $\nu n_N = n_N$. Поэтому, учитывая предложение 3, $1 = D_N(n_N) = D_N(\nu n_N) = D_N(\nu) \times$ $\times D_N(n_N) = D_N(\nu)$.

Функция $D(\nu) = D_{N_1}(\nu) D_{N_2}(\nu)$ является слабой дисперсией.

Лемма 2. *Ядро слабой дисперсии D, равной произведению слабых дисперсий с ядрами N_1 и N_2, равно $N_1 \cap N_2$.*

Действительно, пусть для некоторой подгруппы g будет $D_{N_1}(n_g)D_{N_2}(n_g)$ равно $D(n_g) = 1$. Тогда $D_{N_1}(n_g) = D_{N_2}(n_g) = 1$. В силу предложения 3, подгруппа g должна включаться как в N_1, так и в N_2, т. е. $g \subseteq N_1 \cap N_2$. С другой стороны, по лемме 1, $D_{N_1}(n_{N_1 \cap N_2}) = D_{N_2}(n_{N_1 \cap N_2}) = 1$, и поэтому $D(n_{N_1 \cap N_2}) = 1$. Следовательно, $N_1 \cap N_2$ есть ядро слабой дисперсии $D = D_{N_1}D_{N_2}$.

Следствие 1. *Если $N_1 \cap N_2 = e_1$, то произведение $D_{N_1}D_{N_2}$ будет дисперсией.*

В частности, произведение дисперсии на любую слабую дисперсию дает снова дисперсию. Таким образом, следствие 1 показывает, что в образовании дисперсий слабые дисперсии играют большую роль. Как будет видно из предложения 4, это не случайно. Совокупность всех слабых дисперсий с ядром N образует полугруппу по умножению. Эту полугруппу обозначим $Д_N(G)$.

Предложение 4. $Д_N(G) \sim Д_{e_1}(G / N)$.

Доказательство. Пусть φ — естественное отображение $G \to G / N$. Если μ мера на G, то обозначим $\varphi(\mu)$ естественно индуцированную меру на G / N. Понятно, что $\varphi(\mu_1\mu_2) = \varphi(\mu_1)\varphi(\mu_2)$. Пусть для μ_1 и μ_2 мер на G будет $\varphi(\mu_1) = \varphi(\mu_2)$. Тогда $\mu_1 n_N = \mu_2 n_N$, откуда $D_N(\mu_1) = D_N(\mu_1 n_N) = D_N(\mu_2 n_N) = D_N(\mu_2)$. Т. е., если положить $D(\varphi(\mu)) = D_N(\mu)$, то D будет однозначной функцией на всех мерах группы G / N и удовлетворять пп. $1^0 - 3^0$. Однако D удовлетворяет и п. 4^0. Для этого заметим, что в противном случае найдется подгруппа g в G / N, для которой $D(n_g) = 1 = D_N(\varphi^{-1}(n_g)) = D_N(n_{gN})$. Но равенство $D_N(n_{gN}) = 1$ при $g \neq e_1$ противоречит предложению 3. Обратно, если D_{e_1} — дисперсия на G / N, то положим для любой меры μ на G $D_N(\mu) = D_{e_1}(\varphi(\mu))$. Ясно, что D_N удовлетворяет пп. $1^0 - 3^0$. Предложение доказано.

Следствие 2. *Группа G/N, где N — ядро некоторой слабой дисперсии, является либо конечной, либо группой Ли.*

Действительно, это следует из предложений 2 и 4.

Таким образом, несмотря на большую общность в определении слабых дисперсий, слабые дисперсии в принципе не выходят из множества всех дисперсий на конечных группах и группах Ли. Поэтому, в силу следствия 1, для получения общего вида дисперсий достаточно описать все слабые дисперсии на компактных группах Ли.

Компактная группа G обладает счетным числом неприводимых представлений. Поэтому их можно расположить в парах $\{Q_i, \overline{Q_i}\}$, $i = \overline{1, \infty}$, так, что каждая пара (с точностью до эквивалентности) встретится только один раз. Пусть R_n — линейное пространство над полем действительных чисел, порожденное мнимыми и действительными частями элементов матрицы Q_n. В силу соотношений ортогональности для неприводимых представлений ([3]), пространства R_m и R_n ортогональны при $m \neq n$. Если $Q_n(x) = \|g_{ij}(x)\|$, то $\| \int g_{ij}(x)\mu(dx) \| = Q_n(\mu)$ есть коэффициент Фурье меры μ. Имеет место $Q_n(\nu\mu) = Q_n(\nu)Q_n(\mu)$ для ν, $\mu \in \mathfrak{M}$. Поэтому $|\det Q_n(\mu)| = \Gamma_n$ является слабой дисперсией на $\mathfrak{M}$. Можно показать, что ядро Γ_n равно ядру представления Q_n. Пусть R — алгебраическая сумма колец R_n, $n = \overline{1, \infty}$, а $\mathfrak{M}_0$ — полугруппа мер на G, имеющих конечное число не равных нулю коэффициентов Фурье. Тогда из ([5]) R плотно в пространстве G всех непрерывных действительных функций на G, и $\mathfrak{M}_0$ плотно в $\mathfrak{M}$. Определим в G умножение как свертку относительно инвариантной меры на G. Пространства R_n относительно этого умножения замкнуты и поэтому являются конечномерными кольцами. Из ([5]) следует, что кольца R_n полупростые.

Предложение 5. *Кольцо R_n является простым.*

Доказательство. Если $Q_n \nsim \overline{Q}_n$, то функции $f = \sum (\alpha_{kl}u_{kl} + \beta_{kl}v_{kl})$, где u_{kl}, v_{kl} — действительные и мнимые части g_{kl}, заполняют R_n и определяются коэффициентами однозначно. Соответствие $f \to \| \alpha_{kl} +$

$+ i\beta_{kl}\|$ будет изоморфным. Поэтому кольцо R_n простое. Если $Q_n \sim \overline{Q}_n$ и R_n не просто, то в R_n есть двусторонний идеал R_0, отличный от R_n и 0. В силу ортогональности R_m, R_n и плотности R в C, R_0 будет идеалом в C. Тогда из ([5]) R_0 содержит левые и правые сдвиги функции $f \in R_0$ на любые элементы G. Следовательно, если $\{f_i(x)\}$, $i = \overline{1, l}$,— базис R_0, то $f_i(ax) = \sum \alpha_{ij}(a) f_j(x)$ или $f(ax) = \alpha(a) f(x)$ в векторной форме. Учитывая линейную независимость f_i, получим $f(aa'x) = \alpha(a) f(a'x) = \alpha(a)\alpha(a') f(x) = \alpha(aa') f(x)$, и поэтому $\alpha(aa') = \alpha(a)\alpha(a')$. Из линейной независимости f_j найдутся элементы x_γ такие, что $\det\|f_j(x_\gamma)\| \neq 0$. Следовательно, $\alpha_{ij}(a)$ — элементы матрицы $\alpha(a)$ линейно выражаются через непрерывные функции $f_i(ax_\gamma)$. Таким образом, $\alpha(a)$ есть линейное представление G. Поскольку $f_i(ax_\gamma) \in R_0$, то $\alpha_{ij}(a)$ — элементы представления $\alpha(a)$ также принадлежат R_0. Но $\alpha(a)$, как представление G, разлагается в прямую сумму неприводимых представлений. Поэтому, учитывая ортогональность R_m и R_n, получим, что $R_0 = R_n$. Предложение доказано.

Как следствие простоты R_n и плотности R в C получаем

Предложение 6. *Если Γ — непрерывный гомоморфизм по умножению, не равный тождественно нулю кольца C в неотрицательные числа, то $\Gamma = \Gamma_{n_1}^{\alpha_1} \ldots \Gamma_{n_s}^{\alpha_s}$, $\alpha_i > 0$. Это представление единственно.*

Теперь мы можем сформулировать основной результат.

Теорема. *Всякая дисперсия D на $\mathfrak{M}$ единственным образом представима в виде $D = \Gamma_{n_1}^{\alpha_1} \ldots \Gamma_{n_s}^{\alpha_s}$, $\alpha_i > 0$. Числа n_i таковы, что пересечение ядер представлений Q_{n_i} равно e_1.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}_0^{(n)}$ — полугруппа мер из $\mathfrak{M}_0$, для которых $Q_i(\mu) = 0$ при $i \geqslant n + 1$. $\mathfrak{M}_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}_0^{(n)}$. Рассмотрим отображение φ: $f \to f + 1$ для $f \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} R_i = R^{(n)}$. Отображение φ взаимооднозначно, непрерывно и $\varphi(f_1 f_2) = \varphi(f_1)\varphi(f_2)$ (произведение понимается как свертка). Всякая мера из $\mathfrak{M}_0^{(n)}$ единственным образом представляется в виде $f + 1$, или символически $\varphi^{-1}(\mu) = f$. Если $f \in R^{(n)}$ по модулю достаточно мала, то $\lambda f + 1$, $|\lambda| \leqslant 1$, всегда будет плотностью некоторой меры из $\mathfrak{M}_0^{(n)}$. Таким образом, $\varphi^{-1}(\mathfrak{M}_0^{(n)})$ содержит окрестность нуля $R^{(n)}$. Пусть D задана на $\mathfrak{M}$. В силу плотности $\mathfrak{M}_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}_0^{(n)}$ в $\mathfrak{M}$ D определяется заданием на $\mathfrak{M}_0$. Следовательно, при некотором n D, рассматриваемая на $\mathfrak{M}_0^{(n)}$, не равна тождественно нулю. Определим D на $\varphi^{-1}(\mathfrak{M}_0^{(n)})$, положив $D(\varphi^{-1}(\mu)) = D(\mu)$. Тогда D есть непрерывный гомоморфизм окрестности $\varphi^{-1}(\mathfrak{M}_0^{(n)})$ в неотрицательные числа. Стандартными рассуждениями показывается, что D однозначно распространяется с $\varphi^{-1}(\mathfrak{M}_0^{(n)})$ на все $R^{(n)}$. Но тогда, в силу предложения 6, D имеет вид $\Gamma_{n_1}^{\alpha_1} \ldots \Gamma_{n_s}^{\alpha_s}$, $\alpha_i > 0$. Следовательно, это и есть выражение для D на $\mathfrak{M}$, поскольку n произвольно. Так как дисперсия есть слабая дисперсия с ядром e_1, то, по лемме 2, пересечение ядер Γ_{n_i}, $i = \overline{1, s}$, равных ядрам Q_{n_i}, равное e_1. Теорема доказана.

В заключение выражаю благодарность В. Я. Козлову за внимание.

Институт химической физики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
13 XI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. М. Максимов, Теория вероятностей и ее применения, 12, 1 (1967). [2] Б. М. Клосс, Там же, 4, 3 (1959). [3] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, 1954. [4] В. В. Сазонов, В. Н. Тутубалин, Теория вероятностей и ее применения, 11, 1 (1966). [5] М. А. Наймарк, Нормированные кольца, «Наука», 1968.