Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 4

УДК 513.81 *МАТЕМАТИКА*

Г. А. МАРГУЛИС

ИЗОМЕТРИЧНОСТЬ ЗАМКНУТЫХ МНОГООБРАЗИЙ ПОСТОЯННОЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ С ОДИНАКОВОЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ГРУППОЙ

(Представлено академиком П. С. Александровым 12 III 1970)

I. Пусть M_1^n и M_2^n — два компактных многообразия постоянной отрицательной кривизны -1. В работе Мостова ([1]) доказано, что, если M_1^n и M_2^n $(n \geqslant 3)$ диффеоморфны, то они изометричны. При доказательстве этой теоремы существенно используется аппарат теории квазиконформных отображений. В настоящей заметке формулируется и излагается краткая схема доказательства теоремы, обобщающей теорему Мостова.

Теорема. *Если фундаментальные группы двух компактных многообразий M_1^n и M_2^n $(n \geqslant 3)$ постоянной отрицательной кривизны -1 изоморфны как абстрактные группы, то M_1^n и M_2^n изометричны.*

II. Пусть Γ — некоторая абстрактная группа с конечным числом образующих $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Тогда, если $\gamma \in \Gamma$, то через $\rho(\gamma)$ обозначим наименьшую длину слова, которым записывается γ через $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Далее, положим

$$\hat{\rho}(\gamma_1, \gamma_2) = \rho(\gamma_1^{-1}\gamma_2), \tag{1}$$

где $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$. Легко видеть, что $\hat{\rho}$ задает на Γ левоинвариантную метрику, т. е.

$$\hat{\rho}(\gamma\gamma_1, \gamma\gamma_2) = \hat{\rho}(\gamma_1, \gamma_2) \tag{2}$$

для любых $\gamma_1, \gamma_2, \gamma \in \Gamma$.

Будем говорить, что две метрики ρ_1 и ρ_2 на пространстве X эквивалентны, если существуют такие константы c_1 и c_2, что для любых $x_1, x_2 \in X$

$$0 < c_1 < \frac{\rho_1(x_1, x_2)}{\rho_2(x_1, x_2)} < c_2 < \infty. \tag{3}$$

Если $\bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_m$ — другая конечная система образующих группы Γ, то для этой системы можно аналогично метрике $\hat{\rho}$ определить метрику $\hat{\hat{\rho}}$. Тогда легко доказывается, что метрики $\hat{\rho}$ и $\hat{\hat{\rho}}$ эквивалентны.

III. Обозначим через Γ группу, которой изоморфны как $\pi_1(M_1^n)$, так и $\pi_1(M_2^n)$, а через h_1 и h_2 — соответствующие изоморфизмы. Выберем в L^n некоторую фиксированную точку x и для любых $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ положим

$$\bar{\rho}(\gamma_1, \gamma_2) = \rho_{L^n}[h_1(\gamma_1)(x), h_1(\gamma_2)(x)], \tag{4}$$

$$\bar{\bar{\rho}}(\gamma_1, \gamma_2) = \rho_{L^n}[h_2(\gamma_1)(x), h_2(\gamma_2)(x)], \tag{5}$$

где ρ_{L^n} — расстояние в пространстве Лобачевского, а $h_1(\gamma_1)(x)$, $h_1(\gamma_2)(x)$, $h_2(\gamma_1)(x)$, $h_2(\gamma_2)(x)$ — образы точки x под действием преобразований $h_1(\gamma_1)$, $h_1(\gamma_2)$, $h_2(\gamma_1)$, $h_2(\gamma_2)$ (здесь группы $\pi_1(M_1^n)$ и $\pi_1(M_2^n)$ рассматриваются, как подгруппы группы движений пространства Лобачевского).

Так как $\pi_1(M_1^n)$ и $\pi_1(M_2^n)$ — фундаментальные группы компактных многообразий, то Γ является группой с конечным числом образующих. Поэтому на Γ можно определить метрику $\hat{\rho}$ по способу, описанному в п. II. Можно показать, что как метрика $\bar{\rho}$, так и метрика $\approx\rho$ эквивалентны метрике ρ. Поэтому метрики $\bar{\rho}$ и $\approx\rho$ эквивалентны между собой.

Обозначим через X_1 множество $\pi_1(M_1^n)(x)$, а через X_2 — множество $\pi_1(M_2^n)(x)$. Множества X_1 и X_2 являются подмножествами пространства Лобачевского. Пусть ρ_{X_1} и ρ_{X_2} — ограничения метрики с L^n на X_1 и X_2. Между X_1 и Γ, так же как и между X_2 и Γ, устанавливается естественное взаимно однозначное соответствие (а именно, если $\gamma \in \Gamma$, то положим $g_1(\gamma) = h_1(\gamma)(x)$ и $g_2(\gamma) = h_2(\gamma)(x)$). Рассмотрим отображение $X_1 \xrightarrow{g} X_2$, определяемое формулой

$$g = g_2 g_1^{-1}. \tag{6}$$

Из того, что метрики $\bar{\rho}$ и $\approx\rho$ эквивалентны, легко вытекает, что отображение g удовлетворяет условию Липшица (относительно метрик ρ_{X_1} и ρ_{X_2}). Кроме того, множества X_1 и X_2 достаточно плотны в L^n, т. е. найдется такая константа $D > 0$, что любой шар радиуса D в L^n содержит как точку из X_1, так и точку из X_2. Исходя из сказанного, можно доказать, что отображение g продолжается по непрерывности на абсолют пространства L^n (см. ([2])) и ограничение этого отображения на абсолют является квазиконформным. После этого, пользуясь методом работы ([1]), доказывается сформулированная в начале теорема.

Институт проблем передачи информации
Академии наук СССР
Москва

Поступило
10 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. D. Mostow, IHES, Publ. math., 34 (1968). [2] В. А. Ефремович, Е. С. Тихомирова, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, № 5, 1139 (1964).