Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 4

УДК 517.54 МАТЕМАТИКА

И. М. МИЛИН

ТЕОРЕМА РЕГУЛЯРНОСТИ ХЕЙМАНА ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 2 X 1969)

Пусть S — класс функций $f(z)=z+c_2z^2+\ldots$, регулярных и однолистных в единичном круге, а Σ — класс функций $F(z)=z+\alpha_0+\alpha_1z^{-1}+\ldots$, мероморфных и однолистных в области $|z|>1$. Обозначим разложения:

$$\ln\frac{f(z)}{z}=\sum_{k=1}^{\infty}2\gamma_kz^k,\quad f(z)\in S; \tag{1}$$

$$\ln\frac{z-t}{F(z)-F(t)}=\sum_{k=1}^{\infty}A_k(t)\,z^{-k},\quad F(z)\in\Sigma; \tag{2}$$

$$(1-z)^{-h}=\sum_{k=0}^{\infty}d_k(h)\,z^k,\quad h>0. \tag{3}$$

Кроме того, символом $\{\psi(z)\}_n$ будем обозначать коэффициент при z^n в разложении функции $\psi(z)$ около $z=0$, а через $M(r,f)$ — максимум $|f(z)|$ на окружности $|z|=r$, $0<r<1$.

Известно [1], что для любой функции $f(z)\in S$ существуют $\lim\limits_{r\to1}(1-r)^2M(r,f)=\alpha$, $0\leqslant\alpha\leqslant1$, и при $\alpha>0$ радиус наибольшего роста функции, т. е. такое $\varphi_0\in[0,2\pi)$, что

$$\lim_{r\to1}(1-r)^2|f(re^{i\varphi_0})|=\alpha,\quad 0<\alpha\leqslant1. \tag{4}$$

Используя (4) и «неравенство площадей» [2]:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n|A_n(z)|^2\leqslant\ln\frac{1}{1-r^2},\quad |z|=\frac{1}{r}>1,$$

И. Е. Базилевич [3] доказал для $f(z)\in S$ *неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\left|\gamma_k-\frac{1}{k}e^{ik\varphi_0}\right|^2\leqslant\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\alpha}. \tag{5}$$

Ниже доказывается, что условия (4) и (5) уже достаточны для правильного роста тейлоровских коэффициентов даже неоднолистных функций, т. е. имеет место

Теорема. *Для функции $f(z)=z+c_2z^2+\ldots$, удовлетворяющей условиям (4) и (5), при любом $\lambda>{}^1/_4$ выполняется асимптотическое равенство*

$$\frac{\{(f(z)/z)^{\lambda}\}_n}{d_n(2\lambda)}\sim\alpha^{\lambda}\exp\{i[\lambda\arg f(re^{i\varphi_0})-(n+\lambda)\varphi_0]\}\quad(n\to\infty), \tag{6}$$

где r связано с n соотношением

$$1-r=\theta/n,\quad m<\theta<M \tag{7}$$

(*m и M — положительные постоянные*).

Доказательство теоремы основано на двух леммах.

Лемма 1. *Если коэффициенты степенного ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_kz^k$ *удовлетво-*

ряют условиям:

$$\text{а) } \sum_{k=1}^{\infty} k|A_k|^2 < \infty;$$

$$\text{б) } \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n} A_k = O(1) \quad (n\to\infty) \tag{8}$$

и образован степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} D_k z^k = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k\right), \tag{9}$$

то при любом $h > 1/2$ справедливо асимптотическое равенство

$$\sum_{k=0}^{n} D_k - \frac{1}{d_n(h)}\sum_{k=0}^{n} d_{n-k}(h) D_k = o(1) \quad (n\to\infty). \tag{10}$$

Обозначив через $S_n^{(h)}$ числитель чезаровского среднего из (10), т. е.

$$S_n^{(h)} = \sum_{k=0}^{n} d_{n-k}(h) D_k = \left\{\frac{1}{(1-z)^h}\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k\right)\right\}_n \quad (n=0,1,\ldots), \tag{11}$$

напишем для чезаровских средних очевидное тождество

$$\frac{S_n^{(h)}}{d_n(h)} - \frac{S_n^{(h+1)}}{d_n(h+1)} = \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{d_k(h)}{d_n(h)} - \frac{d_k(h+1)}{d_n(h+1)}\right] D_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} d_{n-k}(h)\cdot kD_k/(n+h) \times$$
$$\times\, d_n(h) = \sum_{k=1}^{n} d_{n-k}(h)\sum_{\nu=1}^{k} D_{k-\nu}\,\nu A_\nu^* \Big/ (n+h)\, d_n(h) = \sum_{k=1}^{n} S_{n-k}^{(h)} kA_k/(n+h) d_n(h). \tag{12}$$

Неравенство Коши, примененное к правой части (12), приведет к оценке

$$\left|\frac{S_n^{(h)}}{d_n(h)} - \frac{S_n^{(h+1)}}{d_n(h+1)}\right| \leqslant \frac{1}{(n+h)\,d_n(h)}\left(\sum_{k=0}^{n-1}|S_k^{(h)}|^2\sum_{k=1}^{n} k^2|A_k|^2\right)^{1/2}. \tag{13}$$

Чтобы оценить $\sum_{k=0}^{n-1}|S_k^{(h)}|^2$, заметим, что в силу условий леммы выполняется соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} k\left|\frac{h}{k} + A_k\right|^2 = h^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + 2h\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n} A_k + \sum_{k=1}^{n} k|A_k|^2 \leqslant h^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + O(1)$$

и, следовательно, при $n\to\infty$

$$\delta_n(h) = \max_{1\leqslant\nu\leqslant n}\left\{\frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{\nu} k\left|\frac{h}{k} + A_k\right|^2 - \sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{k}\right\} = O(1). \tag{14}$$

Но ранее для коэффициентов сложной функции экспоненциального вида установлено неравенство [4]

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\left\{\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{h}{k} + A_k\right)z^k\right)\right\}_k\right|^2 \leqslant \exp(h\delta_{n-1}(h))\sum_{k=0}^{n-1} d_k^2(h),$$

используя которое и учитывая (11) и (14), будем иметь

$$\sum_{k=0}^{n-1}|S_k^{(h)}|^2 = O(1)\sum_{k=0}^{n-1} d_k^2(h) \quad (n\to\infty), \quad h>0. \tag{15}$$

Простые вычисления дают для суммы квадратов биномиальных коэффициентов при $h > 1/2$ оценку

$$\sum_{k=0}^{n-1} d_k^2(h) = O(1)\, n^{2h-1} \quad (n\to\infty),$$

что вместе с (15), (13) и условием (8а) приводит к результату

$$S_n^{(h)} / d_n(h) - S_n^{(h+1)} / d_n(h+1) = o(1) \qquad (n \to \infty), \quad h > 1/2. \tag{16}$$

В частности, при $h=1$ из (16) следует

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} kD_k = o(1) \quad (n \to \infty). \tag{17}$$

Теперь рассмотрим разность

$$\sum_{k=0}^{n} D_k - \frac{S_n^{(h)}}{d_n(h)} = \frac{1}{d_n(h)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} [d_n(h) - d_{n-k}(h)] kD_k. \tag{18}$$

Поскольку при $h \geqslant 2$ последовательность чисел $\frac{1}{k}[d_n(h) - d_{n-k}(h)]$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) невозрастающая, то с помощью неравенства Абеля из (18) и (17) получим

$$\sum_{k=0}^{n} D_k - \frac{S_n^{(h)}}{d_n(h)} = o(1) \quad (n \to \infty), \quad h > 2. \tag{19}$$

Равенства (16) и (19), рассматриваемые совместно, полностью доказывают лемму.

Лемма 2. *В условиях леммы 1 имеют место асимптотические равенства при $h > 1/2$:*

$$\frac{1}{d_n(h)} \sum_{k=0}^{n} d_{n-k}(h) D_k \sim \sum_{k=0}^{\infty} D_k r^k \sim \exp\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) \quad (n \to \infty), \tag{20}$$

где r связано с n формулой (7).

Учитывая лемму 1 и условие (8б), достаточно доказать соотношения

$$\sum_{k=0}^{n} D_k \sim \sum_{k=0}^{\infty} D_k r^k \sim \exp\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) \quad (n \to \infty). \tag{21}$$

Выведем сначала вторую часть (21), для чего рассмотрим разность

$$\sum_{k=1}^{n} A_k - \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^k = \sum_{k=1}^{n} A_k (1 - r^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k r^k.$$

Применяя неравенство Коши, будем иметь

$$\left| \sum_{k=1}^{n} A_k - \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^k \right| \leqslant \left[\sum_{k=1}^{n} k |A_k|^2 (1 - r^k) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} (1 - r^k) \right]^{1/2} +$$

$$+ \frac{1}{n} \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} k |A_k|^2 \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} k r^{2k} \right]^{1/2} \leqslant \left[\sum_{k=1}^{\infty} k |A_k|^2 (1 - r^k) \right]^{1/2} [n(1-r)]^{1/2} +$$

$$+ \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} k |A_k|^2 \right]^{1/2} \frac{1}{n(1-r)},$$

откуда с учетом (7) и (8а) заключаем

$$\sum_{k=1}^{n} A_k - \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^k = o(1) \quad (n \to \infty), \tag{22}$$

что после потенцирования и дает вторую часть (21).

Далее рассмотрим другую разность при $0 < r < 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} D_k - \sum_{k=0}^{\infty} D_k r^k = \sum_{k=0}^{n} D_k (1 - r^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} D_k r^k. \tag{23}$$

Первая сумма в правой части (23) оценивается с помощью неравенства Абеля, именно

$$\left|\sum_{k=0}^{n} D_k (1-r^k)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} kD_k \frac{1}{k}(1-r^k)\right| \leqslant (1-r) \max_{1\leqslant\nu\leqslant n} \left|\sum_{k=1}^{\nu} kD_k\right|. \quad (24)$$

Из (24), (7) и (17) получим

$$\sum_{k=0}^{n} D_k (1-r^k) = o(1) \quad (n\to\infty). \quad (25)$$

Вторую сумму можно оценить, также используя преобразование Абеля:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{N} D_k r^k\right| \leqslant \left(\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k} r^k + \frac{2n+1}{n+1} r^{n+1}\right) \max_{n+1\leqslant k\leqslant N} \frac{1}{k}\left|\sum_{\nu=n+1}^{k} \nu D_\nu\right|. \quad (26)$$

Если r выбрано согласно (7), то первый множитель в (26) равномерно ограничен по n и N, а второй множитель при $n\to\infty$ благодаря (17) стремится к нулю равномерно по N и, следовательно $\sum_{k=n+1}^{\infty} D_k r^k = o(1)$, что вместе с (25) и (8б) дает первую часть (21). Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Не умаляя общности, можно считать, что $\varphi_0 = 0$, ибо в противном случае вместо $f(z)$ достаточно рассмотреть $e^{-i\varphi_0} f(e^{i\varphi_0} z)$.

Исходя из тождества

$$\left(\frac{f(z)}{z}\right)^\lambda = \frac{1}{(1-z)^{2\lambda}}\left[\frac{f(z)}{z}(1-z)^2\right]^\lambda \quad (27)$$

и обозначая

$$\ln\left[\frac{f(z)}{z}(1-z)^2\right]^\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k, \quad A_k = 2\lambda\left(\gamma_k - \frac{1}{k}\right),$$
$$\left[\frac{f(z)}{z}(1-z)^2\right]^\lambda = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k z^k, \quad (28)$$

запишем равенство тейлоровских коэффициентов для функций из (27):

$$\left\{\left(\frac{f(z)}{z}\right)^\lambda\right\}_n = \sum_{k=0}^{n} d_{n-k}(h) D_k \quad (n=0,1,\ldots), \quad h = 2\lambda. \quad (29)$$

Нетрудно проверить, что коэффициенты степенного ряда $\sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k$ удовлетворяют условиям (8). Поэтому при $h > {}^1\!/_2$ и выборе r согласно (7) по лемме 2 будем иметь:

$$\frac{1}{d_n(h)}\sum_{k=0}^{n} d_{n-k}(h) D_k \sim \sum_{k=0}^{\infty} D_k r^k = \left[|f(r)|\frac{(1-r)^2}{r}\right]^\lambda \exp(i\lambda \arg f(r)),$$

что вместе с (29) и (4) и доказывает теорему.

Из полученной теоремы прямо следует теорема регулярности Хеймана ([1]) для коэффициентов однолистных функций в случае $\alpha > 0$ (доказанная им для p-листных функций). Если же $\alpha = 0$, то теорема регулярности доказывается более элементарно.

Поступило
26 IX 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] У. К. Хейман, Многолистные функции, ИЛ, 1960. [2] И. М. Милин, ДАН, 154, № 2 (1964). [3] И. Е. Базилевич, Матем. сборн., 74 (116), 1 (1967). [4] И. М. Милин, ДАН, 176, № 5 (1967).