Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 4

УДК 513.88:513.83 *МАТЕМАТИКА*

В. Д. МИЛЬМАН

ДЖЕЙМСОВСКИЕ КЛАССЫ МИНИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ И ИХ СВЯЗЬ С ИЗОМЕТРИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ B-ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 18 XI 1969)

1. В настоящей статье распространяется принадлежащая Р. Джеймсу ([1, 2]; см. также ([3]), гл. 4, § 3) теория базисов в пространствах Банаха (B-пространства) на минимальные (т. е. биортогональные) последовательности (см. п. 2). Это позволяет получить некоторые общие свойства B-пространств (теорема 4, следствия 1, 2). В п. 4 мы используем язык β- и δ-модулей (введенных в ([4])) для установления связей между изометрическими свойствами пространства (т. е. его единичной сферой $S(B) = \{x \in B: \|x\| = 1\}$) и различными классами минимальных систем, являющимися линейно-топологическими объектами. Таким образом, минимальные системы выступают здесь как связующее звено между изометрическими и топологическими свойствами B-пространств. В окончательных формулировках (теорема 6) они уже не присутствуют. Результаты такого рода отмечались в ([5]).

Пусть $X = \{x_k\}_1^\infty \subset B$ — минимальная последовательность. Сопряженную (т. е. биортогональную) к X последовательность функционалов обозначим $X^* = \{x_k^*\}_1^\infty \subset B^*$. Таким образом, $x_k^*(x_j) = \delta_{kj}$. Система $Y = \{y_k\}_1^\infty \subset B$ называется блочной по отношению к X, если $\left\{y_k = \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j x_j\right\}_{k=1}^\infty$, где $n_{k+1} > n_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Обозначим $E(M)$ замкнутую линейную оболочку множества $M \subset B$. Говоря о подпространствах, мы будем иметь в виду лишь бесконечномерные подпространства.

Базис $X = \{x_k\}_1^\infty \subset S(B)$ называется **ограниченно полным** (введен в ([6])), если из оценки $\sup_n \left\|\sum_1^n a_k x_k\right\| < \infty$ следует сходимость ряда $\sum_1^\infty a_k x_k$, и называется **натягивающим** ([1]), если сопряженная система X^* полна в B^*, т. е. $E(X^*) = B^*$. В случае базисных последовательностей X, т. е. базисов в своей замкнутой линейной оболочке $E(X)$, употребление указанной терминологии предполагает переход к подпространству $E(X)$.

Алаоглу ([7]) показал, что из ограниченной полноты базиса $X \subset B$ следует, что $B \simeq E(X^*)^*$, т. е. B изоморфно сопряженному пространству к $E(X^*)$. Джеймс ([1]) установил, что рефлексивность пространства B с базисом X эквивалентна свойству базиса быть одновременно ограниченно полным и натягивающим, и показал двойственность этих свойств. Различные свойства базисов, не являющихся ограниченно полными либо натягивающими, а также блок-базисов по таким системам можно найти в ([8]).

2. Минимальную последовательность $X = \{x_k\}_1^\infty \subset B$ назовем **натягивающей**, если $X^* \subset E(X)^*$ полно в $E(X)^*$. Минимальную систему X с тотальной на $E(X)$ сопряженной X^* назовем **ограниченно полной**,

если для любой ограниченной последовательности $\{y_j\}_{j=1}^{\infty} \subset E(X)$ из сходимости $f(y_j) \underset{j\to\infty}{\to}$ при любом $f \in E(X^*)$ следует существование $y_0 \in E(X)$, для которого $f(y_j) \to f(y_0)\, \forall f \in E(X^*)$, что обозначим $y_j \rightharpoonup y_0(E(X^*))$.

З а м е ч а н и е 1. Если B сепарабельно и изоморфно сопряженному пространству, $B \simeq B_1^*$, то любая полная в B минимальная система X с полной в B_1 сопряженной $X^* \subset B_1$ ограниченно полная.

П р е д л о ж е н и е 1. а) *Если ограниченно полная минимальная система является базисом, то этот базис ограниченно полный, и обратно.*

б) *Любая блок-система ограниченно полной (либо натягивающей) минимальной системы ограниченно полная (соответственно натягивающая).*

С л е д с т в и е 1. *Если B вкладывается в сепарабельное пространство, изоморфное сопряженному, то $\forall \varepsilon > 0$ в B $\exists B_\varepsilon \subset B (\dim B_\varepsilon = \infty)$ с ограниченно полным базисом, ε-изометричное* сопряженному пространству.*

С л е д с т в и е 2. *Если B имеет сепарабельное сопряженное, то в B существует подпространство с натягивающим базисом.*

Т е о р е м а 1**. *Если в B существует полная минимальная ограниченно полная последовательность X, то B изоморфно сопряженному пространству.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $X^* \subset B^*$ — сопряженная к X система. Обозначим QB естественное вложение B в B^{**} и $B_0 = E(X^*)^{\perp} \subset B^{**}$, где, как обычно, $E^{\perp}$ — аннулятор пространства E. В силу тотальности X^* на B, $B_0 \cap QB = 0$. Покажем, что $B_0 + QB = B^{**}$. Действительно, пусть $z \in B^{**}$. В силу сепарабельности $E(X^*)$ существует ограниченная последовательность $\{z_n\}_1^{\infty} \subset QB$ такая, что $z_n \rightharpoonup z(E(X^*))$. По определению ограниченной полноты X отсюда следует, что существует $x_0 \in QB$, такое, что $z_n \rightharpoonup x_0(E(x^*))$. Но тогда $z - x_0 = y_0 \in E(X^*)^{\perp}$. Таким образом, $z = z_0 + y_0 \in QB + B_0$. Итак, $(E(X^*))^{\perp} + QB = B^{**}$. Это означает, что $(E(X^*))^* = B^{**} / (E(X^*))^{\perp} \simeq QB = B$.

Т е о р е м а 2. *Пусть X — полная минимальная система в B с тотальной сопряженной. Для рефлексивности B необходимо и достаточно, чтобы система X была одновременно ограниченно полной и натягивающей.*

Необходимость очевидна. Доказательство достаточности проводим тем же способом, что и доказательство теоремы 1. Из ограниченной полноты минимальной системы X следует, что $B^{**} = QB + E(X^*)^{\perp}$ (см. доказательство теоремы 1). Однако в силу натягиваемости X пространство $E(X^*) = B^*$ и, значит, $E(X^*)^{\perp} = 0$. Таким образом, $B^{**} = QB$, что и означает рефлексивность.

Т е о р е м а 3. *Сопряженная система к ограниченно полной натягивающая, и обратно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть X — ограниченно полная минимальная последовательность. Из теоремы 1 следует, что сопряженная система X^* натягивает $B_1 (= E(X^*))$, где $B_1^* \simeq E(X)$. Значит, $(X^*)^* = X$ полная в $E(X) \simeq B_1^*$.

В обратную сторону: сопряженная система X к натягивающей минимальной системе X ограниченно полная, так как $E(X^*) = E(X)^*$ (см. замечание 1).

Из приведенных в этом пункте результатов легко следует:

Т е о р е м а 4. *Если B^{**} сепарабельно, то в B и B^* содержатся бесконечномерные рефлексивные подпространства.*

---

* B_1 и B_2 называются ε-изометричными, если существует изоморфизм T: $B_1 \to B_2$ такой, что $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \leqslant 1 + \varepsilon$.

** Алаоглу ([7]) показал, что слабая полнота (в топологическом смысле, т. е. на обобщенных последовательностях) B относительно нормирующего подпространства $E \subset B^*$, т. е. такого, что $\sup\{|f(x)|: f \in S(E)\} \geqslant c\|x\|$ при некотором $c > 0$ и всех $x \in B$, влечет изоморфизм B и E^*. Из доказательства теоремы 1 видно, что то же следует при одной лишь тотальности E, а также из секвенциальной слабой полноты относительно сепарабельного $E \subset B^*$.

Отметим также следующую переформулировку теоремы 4: *если в B нет рефлексивных (бесконечномерных) подпространств, то B^{**} несепарабельно.*

3. Приведем некоторые свойства минимальных систем, связанные с понятиями натягиваемости и ограниченной полноты. Вначале укажем внутреннюю характеристику натягиваемости минимальных систем, аналогичную характеристике Джеймса ([1]) натягивающих базисов.

Предложение 2. *Пусть $X=\{x_k\}_1^\infty\subset B$ — минимальная система и биортогональная $X^*\subset E(X)^*$. Обозначим $p_n(f)=\sup\{|f(x)|:\ x\in S(E[x_k]_{k=n}^\infty)\}$. Для полноты X^* в $E(X)^*$, т. е. для натягиваемости X, необходимо и достаточно, чтобы $p_n(f)\to 0$ $(n\to\infty)$ при любом $f\in B^*$.*

Предложение 3. *Если монотонный базис* $X=\{x_k\}_1^\infty\subset S(B)$ не является ограниченно полным, то $\forall\theta>0$ существует блочная по X последовательность $\{y_k\}_1^\infty$, $\|y_k\|=1$ такая, что $1-\theta\leqslant\left\|\sum_1^n y_k\right\|\leqslant 1+\theta$ при всех $n=1,2,\ldots$*

Предложение 4. *Если базис X не является натягивающим, то $\forall\theta>0$ существует блочная по X последовательность $Y=\{y_k\}_1^\infty\subset S(B)$, такая, что $\left\|\sum_1^\infty \alpha_k y_k\right\|\geqslant(1-\theta)\sum_1^\infty\alpha_k$ для всех $\{\alpha_k\geqslant 0\}_1^\infty$.*

4. Пусть $\mathfrak{B}$ — некоторое семейство подпространств пространства B. Обозначим

$$\beta(\varepsilon;x,\mathfrak{B})=\sup_{E\in\mathfrak{B}}\inf_{y\in S(E)}\|x/\|x\|+\varepsilon y\|-1$$

и

$$\delta(\varepsilon;x,\mathfrak{B})=\inf_{E\in\mathfrak{B}}\sup_{y\in S(E)}\|x/\|x\|+\varepsilon y\|-1.$$

В том случае, когда $\mathfrak{B}$ есть семейство всех подпространств с конечным дефектом, будем писать $\beta^0(\varepsilon;x,B)$ и $\delta^0(\varepsilon;x,B)$. Значение характеристик β и δ (β- и δ-модули) для некоторых конкретных пространств приведены в ([4]). Пусть $X=\{x_k\}_1^\infty\subset B$. Обозначим $\mathfrak{B}(X)=\{E(\{x_k\}_n^\infty)\}_{n=1}^\infty$.

Теорема 5. *Пусть X — минимальная система с тотальной сопряженной.*

а) *Если $\beta(\varepsilon_0;x,\mathfrak{B}(X))=0$ при некотором $\varepsilon_0>0$, то X не является ограниченно полной.*

б) *Если $\delta(\varepsilon;x,\mathfrak{B}(X))=\varepsilon$ (при всех $x\in S(B)$), то $E(X^*)\neq B^*$, т. е. X не является натягивающей последовательностью.*

Доказательство теоремы 5 существенно использует результаты п. 2. Наметим, к примеру, план доказательства п. а) теоремы. Исходя из определения β-модуля, для заданного $\theta>0$ строим блочную по X последовательность $Y=\{y_i\}_{i=0}^\infty\subset S(B)$ такую, что $1+\theta\geqslant\left\|y_0+\varepsilon_0\sum_1^n y_k\right\|\geqslant 1-\theta$ при всех $n=1,2,\ldots$ Полученные неравенства означают, что минимальная система Y не является ограниченно полной. Так как Y — блок-система по X, то из предложения 1 следует, что X также не является ограниченно полной.

Из теоремы 5 и результатов п. 2 следует

Теорема 6. *Пусть B — сепарабельное пространство Банаха.*

а) *Если $\beta^0(\varepsilon_0;x,B)=0$ при некотором $\varepsilon_0>0$, то B не изоморфно сопряженному пространству и не вкладывается как подпространство в сепарабельное пространство, изоморфное сопряженному.*

б) *Если $\delta^0(\varepsilon;x,B)=\varepsilon$, то B^* несепарабельно.*

Следствие 3 (И. М. Гельфанд ([9])). *Пространство L_1 $[0,1]$ не изо-*

* Базис $\{x_k\}_1^\infty$ называется θ-монотонным, если $\|\sum_1^m a_kx_k\|\geqslant(1-\theta)\|\sum_1^n a_kx_k\|$ при всех $m\geqslant n$ и любых числах $\{a_k\}_1^\infty$, и монотонным, если в указанном неравенстве можно взять $\theta=0$.

морфно подпространству никакого сепарабельного B-пространства, изоморфного сопряженному, так как $\beta^0(1, x, L_1) \equiv 0$.

Следствие 4 (Ч. Бессага и А. Пелчинский ([10])). *Если сепарабельное пространство содержит подпространство, изоморфное* c_0, *то* B *не изоморфно сопряженному пространству, так как* $\beta^0(1, x, c_0) \equiv 0$.

В связи с п. а) теоремы 6 отметим, что из условия $\beta^0(\varepsilon_0, x_0, B) = 0$ $(\varepsilon_0 > 0)$ не вытекает, что $x_0 \in S(B)$ не является крайней точкой единичной сферы. Так, например, $\beta^0(\varepsilon; x(t), C[0, 1]) = 0$ при $0 \leqslant \varepsilon < 2$ для всех элементов $x(t) \in S(C)$, в том числе и для функции $x(t) \equiv 1$.

Теорема 6 (п. а)) допускает следующее усиление:

Теорема 6′. *Пусть* B — *сепарабельное пространство. Если для любого компакта* $K \subset S(B)$ *найдется* $\varepsilon(K) > 0$ *такое, что* $\beta^0(\varepsilon(K); x, B) = 0$ *для всех* $x \in K$, *то* B *не вкладывается как подпространство в сепарабельное пространство, изоморфное сопряженному.*

Теоремы 5 и 6 частично обращают результаты пп. 4 и 5 из ([5]), которые мы дополним следующим предложением:

Теорема 7. *Пусть* B *сепарабельно. Для* $\forall \theta > 0$ *существует подпространство* $B_1 \subset B$ *с* θ-*монотонным базисом* $X = \{x_k\}_1^\infty \subset S(B_1)$, *для которого при любом* $x \in S(B_1)$ $\beta^0(\varepsilon; x, B_1) \equiv \beta^0(\varepsilon; x, B)$, $\delta^0(\varepsilon; x, B_1) = \delta^0(\varepsilon; x, B)$.

Более того, если $\mathfrak{B}(X) = \{E(\{x_k\}_{k=n}^{\infty})\}_{n=1}^{\infty}$, *то при любом* $x \in S(B)$ (*а не только* $x \in S(B_1)$) $\beta(\varepsilon; x, \mathfrak{B}(X)) \equiv \beta^0(\varepsilon; x, B)$ и $\delta(\varepsilon; x, \mathfrak{B}(X)) \equiv \delta^0(\varepsilon; x, B)$.

При этом:

а) *Если* $\beta^0(1, x, B) \geqslant a > 0$, *то* X — *ограниченно полный базис, а значит,* B_1 θ-*изометрично сопряженному пространству.*

б) *Если* $\delta^0(1, x, B) \leqslant b < 1$, *то* X — *натягивающий базис, а значит,* B_1 *имеет сепарабельное сопряженное.*

в) *Если одновременно* $\beta^0(1, x, B) \geqslant a > 0$ *и* $\delta^0(1, x, B) \leqslant b < 1$, *то* B_1 *рефлексивно.*

Институт химической физики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
30 X 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. C. James, Ann. Math., (2), 52, № 3, 518 (1950). [2] R. C. James, Proc. Nat. Acad. Sci. Un. States Am., 37, 174 (1951). [3] М. М. Дэй, Нормированные линейные пространства, М., 1961. [4] В. Д. Мильман, ДАН, 177, № 3, 514 (1967). [5] В. Д. Мильман, ДАН, 179, № 4, 779 (1968). [6] N. Dunford, A. P. Morse, Trans. Am. Math. Soc., 40, № 3, 415 (1936). [7] L. Alaogly, Ann. Math., 41, № 1, 252 (1940). [8] J. Singer, St. Math., 21, 351 (1962). [9] И. М. Гельфанд, ДАН, 17, № 5, 237 (1937). [10] C. Bessaga, A. Pełczyński, Studia Math., 17, 151 (1958).