Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 6

УДК 62.501.12 КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Академик Б. Н. ПЕТРОВ, В. А. БОДНЕР, К. Б. АЛЕКСЕЕВ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПОВОРОТНЫМ МАНЕВРОМ

1. Управление ориентацией летательных аппаратов посредством одного поворота вокруг некоторой оси ([1]) обладает лучшими потенциальными возможностями по сравнению с обычно применяемыми тремя последовательными поворотами относительно ортогональных осей, связанных с аппаратом. В заметке дано аналитическое решение задачи синтеза алгоритма управления ориентацией. Для этого применен принцип экстенсивного управления, заключающийся в выборе ограниченного по величине вектора управляющего момента $\mathbf{M} = \|M_1, M_2, M_3\|^T$ из условия движения аппарата относительно заданной оси при приложении составляющих момента M_i по связаным осям аппарата.

2. Введем три системы координат с началом в центре масс аппарата: инерциальную X_i (здесь и в дальнейшем $i = 1, 2, 3$), связанную с аппаратом x_i, и вспомогательную ξ_i. Угловое положение аппарата в системе X_i определяется углами Эйлера ψ_i (рис. 1). Матрица преобразования $X_i \to x_i$ имеет вид

$$\alpha = \|\alpha_{ij}\|, \qquad (1)$$

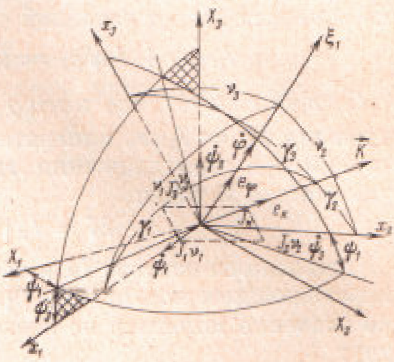

Рис. 1

где α_{ij} — функции углов ψ_i.

Угол φ поворота аппарата вокруг оси, заданной единичным вектором e_φ, и ориентация этого вектора определяются

$$\varphi = \arccos(\operatorname{Sp}\alpha - 1)/2, \qquad e_\varphi = \|\nu_1, \nu_2, \nu_3\|^T, \qquad (2)$$

где $\nu_i = \dfrac{\alpha_{i+1,\, i+2} - \alpha_{i+2,\, i+1}}{2\sin\varphi}$, $\operatorname{Sp}\alpha = \sum\limits_{i=1}^{3}\alpha_{ii}$ — след матрицы α.

Совместим ось ξ_1 вспомогательной системы с вектором e_φ. Обозначим единичные векторы осей ξ_i через e_i, причем $e_1 = e_\varphi$. Матрица преобразования $x_i \to \xi_i$ имеет вид

$$\nu = \|\nu_{ij}\|, \qquad (3)$$

где $\nu_{i1} = \nu_i$, а $\nu_{12}, \ldots, \nu_{33}$ — любые числа, при которых матрица α ортогональна.

Тензор инерции I_ξ аппарата в системе ξ_i будет

$$I_\xi = \nu I_x \nu^T, \qquad (4)$$

где $I_x = \begin{Vmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{Vmatrix}$, J_1, J_2, J_3 — главные моменты инерции аппарата.

Пусть вектор угловой скорости аппарата $\boldsymbol{\omega}$ совпадает с вектором e_φ, т. е.

$$\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi e_\varphi. \qquad (5)$$

При выполнении этого условия вектор кинетического момента аппарата будет

$$\mathbf{K} = J_k\dot\varphi e_\text{к}, \qquad (6)$$

где $J_к^2 = \sum_{i=1}^{3} J_i^2 \nu_i^2$, $e_к = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i \varepsilon_i$ — единичный вектор, $\gamma_i = J_i \nu_i / J_к$ — направляющие косинусы, ε_i — единичные векторы осей x_i.

Из выражения γ_i следует, что вектор кинетического момента динамически несимметричного аппарата $\mathbf{K}$ не совпадает с осью e_φ. Определим составляющие этого вектора на направление оси e_φ и на направление $e_э$, перпендикулярное к оси вращения

$$K_\varphi = \mathbf{K} \cdot e_\varphi = J_\varphi \dot{\varphi}, \quad K_э = \mathbf{K} \cdot e_э = J_э \dot{\varphi}, \quad J_\varphi = J_{11} = \sum_{i=1}^{3} J_i \nu_i^2,$$

$$J_э^2 = \sum_{i=1}^{3} (J_{i+1} - J_{i+2})^2 \nu_{i+1}^2 \nu_{i+2}^2. \tag{7}$$

Уравнение движения аппарата в форме Эйлера с учетом (5) будет

$$d\mathbf{K} / dt + \dot{\varphi} e_\varphi \times \mathbf{K} = \mathbf{M}. \tag{8}$$

Искомый вектор управляющего момента $\mathbf{M}$ должен обеспечить вращение аппарата вокруг заданной оси e_φ. Преобразуем (8) с учетом (6) и (7)

$$J_к \ddot{\varphi} e_к + J_э \dot{\varphi}^2 e_г = \mathbf{M}, \quad e_г = e_\varphi \times e_к / |e_\varphi \times e_к|. \tag{9}$$

Отсюда следует, что вектор $\mathbf{M}$ должен обеспечить требуемый закон движения $\mathbf{M}_1 = J_к \ddot{\varphi} e_\varphi$ аппарата вокруг оси e_φ и скомпенсировать возникающий при этом движении гироскопический момент $\mathbf{M}_2 = J_э \dot{\varphi}^2 e_г$. Модуль вектора $\mathbf{M}$ равен

$$M = J_к |\ddot{\varphi}| (1 + J_э^2 \dot{\varphi}^4 / J_к^2 \ddot{\varphi}^2)^{1/2}. \tag{10}$$

Ориентацию вектора $\mathbf{M}$ в связанной системе координат зададим тремя направляющими косинусами β_1, β_2, β_3. Если M_{mi} — максимально допустимое значение моментов по связанным осям, то составляющие моментов будут

$$M_i = M_{mi}, \quad M_{i+1} = M_{mi} |\beta_{i+1}| / \beta_i^*, \quad M_{i+2} = M_{mi} |\beta_{i+2}| / \beta_i^*, \tag{11}$$

где β_i^* — максимальное значение направляющего косинуса вектора $\mathbf{M}$ в системе x_i.

Моменты M_i по связанным осям необходимо выбрать так, чтобы аппарат совершал маневр вокруг оси e_φ на угол φ за время T, причем

$$\varphi(0) = -\varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0, \quad \varphi(T) = \dot{\varphi}(T) = 0, \tag{12}$$

при минимально возможных энергетических затратах Q

$$Q = M_{mi} \int_0^T \left(1 + \frac{|\beta_{i+1}| + |\beta_{i+2}|}{\beta_i^*}\right) dt. \tag{13}$$

3. Вводя в рассмотрение угол θ между векторами управляющего $\mathbf{M}$ и кинетического $\mathbf{K}$ моментов, представим уравнение (9) в скалярной форме

$$\ddot{\varphi} = \pm \frac{M}{J_k} \cos\theta, \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{M}{J_э} \sin\theta, \tag{14}$$

откуда

$$\operatorname{tg}\theta = J_э \dot{\varphi}^2 / J_к \ddot{\varphi}. \tag{15}$$

Для получения направляющих косинусов β_i спроектируем уравнение (8) на оси связанной системы

$$J_i \nu_i \ddot{\varphi} + (J_{i+2} - J_{i+1}) \nu_{i+1} \nu_{i+2} \dot{\varphi}^2 = M_i \tag{16}$$

и воспользуемся выражениями (10) и (15); тогда

$$\beta_i = (\tilde{a}_i + \tilde{b}_i \operatorname{tg}\theta) \cos\theta, \quad \tilde{a}_i = (J_i \nu_i / J_к) \operatorname{sign} \ddot{\varphi},$$
$$\tilde{b}_i = (J_{i+2} - J_{i+1}) \nu_{i+1} \nu_{i+2} / J_э. \tag{17}$$

С учетом (17) уравнения (14) примут вид

$$\ddot{\varphi} = \pm M_{mi} / J_{к}(\tilde{a}_i + \tilde{b}_i \operatorname{tg}\theta),$$
$$\dot{\varphi}^2 = M_{mi} \operatorname{tg}\theta / J_{э}(\tilde{a}_i + \tilde{b}_i \operatorname{tg}\theta). \quad (18)$$

Выбор текущего значения угла θ должен производиться из условия совместимости уравнений (18), которое сводится к уравнению

$$d\theta / \cos^2\theta \sqrt{(\tilde{a}_i + \tilde{b}_i \operatorname{tg}\theta) \operatorname{tg}\theta} = (2\sqrt{M_{mi}J_{э} / a_i J_{к}})\, d\tau, \quad (19)$$

и решение которого можно представить в виде

$$\operatorname{tg}\theta = \begin{cases} (a_i/b_i)\sin^2 nt & \text{при} \quad \beta_i^* = (a_i - b_i \operatorname{tg}\theta)\cos\theta, \\ (a_i/b_i)\operatorname{sh}^2 nt & \text{при} \quad \beta_i^* = (a_i + b_i \operatorname{tg}\theta)\cos\theta, \end{cases} \quad (20)$$

где $a_i = |\tilde{a}_i|$, $b_i = |\tilde{b}_i|$, $n = \sqrt{M_{mi}b_iJ_{э} / J_{к}a_i}$.

Подставляя значение $\operatorname{tg}\theta$ из (20) в (18), получим

$$\dot{\varphi} = \begin{cases} m/\cos^2 nt & \text{при} \quad \beta_i^* = (a_i - b_i \operatorname{tg}\theta)\cos\theta, \\ m/\operatorname{ch}^2 nt & \text{при} \quad \beta_i^* = (a_i + b_i \operatorname{tg}\theta)\cos\theta, \end{cases} \qquad m = M_{mi}/J_{к}a_i. \quad (21)$$

Уравнение (21) с учетом граничных условий (12) характеризует динамические свойства аппарата при экстенсивном управлении. Для синтеза системы экстенсивного управления применим принцип максимума Понтрягина ([2]).

4. Время переключения $t_1 \in (0, T)$ максимального по величине управляющего момента находится из решения уравнений (21) и 12

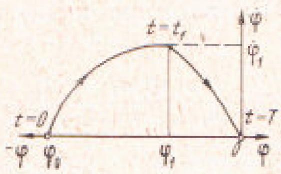

Рис. 2

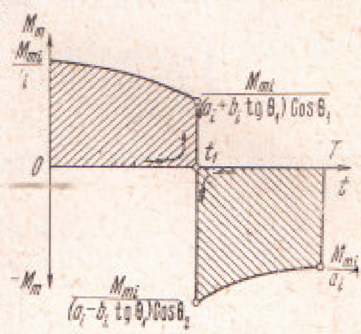

Рис. 3

Не нарушая общности, положим, что $\tilde{a}_i$ и $\tilde{b}_i$ одного знака, поэтому решение уравнения (21) при $t \leqslant t_1$ будет

$$\dot{\varphi} = (m / n) \operatorname{tg} nt, \quad \varphi = -\varphi_0 + (m / n^2) \ln \operatorname{ch} nt. \quad (22)$$

При $t = t_1$, когда $\theta_1 = \operatorname{arc\,tg}((a_i / b_i)\operatorname{sh}^2 nt_1)$, происходит переключение управляющего воздействия. При этом составляющая $M_1 = J_{к}\ddot{\varphi}$ момента **М** изменяется по величине и направлению, тогда как направление составляющей $M_2 = J_{э}\dot{\varphi}^2$ остается неизменным.

Из условия компенсации гироскопического момента

$$M_2 = J_{э}\dot{\varphi}^2 = M_m \sin\theta \quad (23)$$

при $M_m = M_{mi} / (a_i + b_i \operatorname{tg}\theta_1)\cos\theta_1$ или $M_m = M_{mi} / (a_i - b_i \operatorname{tg}\theta_2)\cos\theta_2$ получаем

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{a_i}{b_i}\,\frac{\operatorname{sh}^2 nt_1}{1 + 2\operatorname{sh}^2 nt_1}. \quad (24)$$

Определение угла θ при $t > t_1$ с учетом начального значения $\theta_2(t) = \theta_2$ производится из выражения

$$\operatorname{tg}\theta = (a_i / b_i)\sin^2[n(t - t_1) - \varkappa], \quad (25)$$

где $\varkappa = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{th} nt_1)$. Поскольку $\theta(T) = 0$, то из (25) находим

$$\operatorname{tg} n(T - t_1) = \operatorname{th} nt_1. \quad (26)$$

Для получения второго уравнения, связывающего искомые величины T и t_1, решим уравнение движения (21) для $t_1 \leqslant t \leqslant T$. В этом случае

$$\ddot{\varphi} = -\frac{m}{\cos^2[n(t-t_1)-\varkappa]}, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_1 - \frac{m}{n}\{\operatorname{tg}[n(t-t_1)-\varkappa] + \operatorname{th} nt_1\},$$
$$\varphi = \varphi_1 + \left(\dot{\varphi}_1 - \frac{m}{n}\operatorname{th} nt_1\right)(t-t_1) + \frac{m}{n^2}\left\{\ln\frac{\cos[n(t-t_1)-\varkappa]}{\cos\varkappa}\right\}. \tag{27}$$

Полагая в (27) $t = T$ и пользуясь (12), находим

$$\frac{\operatorname{ch} nt_1}{\cos n(T-t_1)} = \exp\left(\frac{n^2}{m}\varphi_0\right). \tag{28}$$

Из (26) и (28) в предположении, что β_i^* максимально в течение всего процесса управления, получаем время переключения t_1 и минимальное время T_m поворота аппарата на угол φ_0

$$t_1 = (1/n)\operatorname{arc\,th}\lambda, \quad T_m = (1/n)(\operatorname{arc\,tg}\lambda + \operatorname{arc\,th}\lambda),$$
$$\lambda^2 = \operatorname{th}(n^2/m)\varphi_0. \tag{29}$$

Выражения для моментов по осям аппарата, обеспечивающих поворот за минимальное время вокруг оси e_φ, имеют вид

$$M_i = M_{mi},$$
$$M_{i+1} = M_{mi}\begin{cases}\dfrac{\tilde{a}_{i+1}}{a_i}\operatorname{ch}^{-2} nt + \dfrac{\tilde{b}_{i+1}}{b_i}\operatorname{th}^2 nt & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant t_1,\\ \dfrac{\tilde{a}_{i+1}}{a_i}\cos^{-2}[n(t-t_1)-\varkappa] + \dfrac{\tilde{b}_{i+1}}{b_i}\operatorname{tg}^2[n(t-t_1)-\varkappa] & \\ \qquad \text{при } t_1 \leqslant t \leqslant T. & \end{cases} \tag{30}$$

Расход рабочего вещества на управление в соответствии с (13) и (30) будет

$$Q = M_m\left\{T + \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\tilde{a}_{i+1}}{a_i}\operatorname{th} nt_1 + \frac{\tilde{b}_{i+1}}{b_i}\left(t_1 + \frac{a_i \operatorname{th} nt_1}{nb_i(1+\operatorname{th} nt_1)}\right)\right]\right\}, \tag{31}$$

где M_m — максимальный момент, принятый одинаковым по трем осям.

На рис. 2 дана траектория движения изображающей точки на фазовой плоскости, на рис. 3 показан характер изменения модуля вектора управляющего момента.

Перевод аппарата из начального $\varphi(0) = -\varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ в конечное $\varphi(T) = \dot{\varphi}(T) = 0$ положение за заданное время T_3 требует двух переключений максимального по величине управляющего момента M_m. Если обозначить моменты переключения t_1 и $t_1 + t_2$, причем $T_3 = t_1 + t_2 + t_3$, где t_3 — время торможения аппарата (рис. 4) и применить изложенную выше методику исследования, то получим уравнения для определения t_1, t_2 и t_3

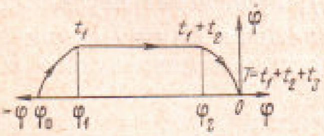

Рис. 4

$$T_3 = t_1 + t_2 + t_3, \quad \operatorname{th} nt_1 = \operatorname{tg} nt_1, \tag{32}$$
$$\operatorname{ch} nt_1 / \cos nt_3 = \exp[(n^2/m)\varphi_0 - nt_2 \operatorname{th} nt_1].$$

Реализация алгоритма оптимального экстенсивного управления должна производиться на бортовом вычислительном устройстве, в котором определяются направление оси вращения, величина и знак результирующего угла поворота и формируются управляющие моменты по связанным осям. При этом может быть обеспечено либо минимальное время поворотного маневра, либо минимальный расход рабочего тела за заданное время.

Поступило
12 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Дж. Синг, Классическая динамика, М., 1963. [2] Л. С. Понтрягин и др., Математическая теория оптимальных процессов, М., 1961.