Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 6

УДК 517.949.2

МАТЕМАТИКА

М. Л. РАСУЛОВ

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МАТРИЦА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КОМПЛЕКСНЫМ ПАРАМЕТРОМ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 12 XII 1969)

Фундаментальная матрица для общей эллиптической системы без параметра построена в работе [1], методика которой также применена в случае эллиптической системы с действительным параметром [2].

В связи с применением метода контурного интеграла [3] к решению параболических задач настоящая заметка посвящена построению и оценке фундаментальной матрицы для системы

$$A(x)\Delta u + \sum_{i=1}^{3} A_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + (A_0(x) - \lambda^2)u = 0, \tag{1}$$

рассматриваемой в трехмерной области D эвклидова пространства, где $A(x)$, $A_i(x)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ — квадратные матрицы порядка m.

Предполагается, что в замкнутой области D матрицы $A(x)$, $A_i(x)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ имеют непрерывные производные первого порядка по всем своим аргументам и корни ν_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ характеристического уравнения

$$\Delta(1, \nu) = \det(A(x) + \nu E) = 0 \tag{2}$$

имеют постоянную кратность m_i и строго отрицательные действительные части *

$$\operatorname{Re}\nu_i(x) < 0, \tag{3}$$

где $\Delta(\beta, \nu) = \det(\beta A(x) + \nu E)$, E — единичная матрица порядка m.

Фундаментальная матрица $P_0(x - \xi, \xi, \lambda)$ с особенностью в точке $x = \xi$ для системы

$$\sum_{i=1}^{3} A(\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \lambda^2 u = 0$$

строится в конечном виде

$$P_0(x - \xi, \xi, \lambda) = (P_{0ks}(x - \xi, \xi, \lambda))_{k,s=1}^{m}, \tag{4}$$

где элементы $P_{0ks}(x - \xi, \xi, \lambda)$ допускают представления

$$P_{0ks}(x - \xi, \xi, \lambda) = \frac{1}{4\pi|x - \xi|}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{B_{sk}^{(i,j)}(\xi)\,(m_i - j)!}{(-\nu_i(\xi))^{m_i - j + 1}} \times$$

$$\times\left\{\frac{1}{(m_i - j)!}\exp\left[-\lambda\frac{|x - \xi|}{\sqrt{-\nu_i(\xi)}}\right] + \sum_{r=1}^{m_i - j}\frac{1}{(r!)^2(m_i - j - r)!}\left[\left(-\frac{|x - \xi|}{2\sqrt{-\nu_i(\xi)}}\right)^r\lambda^r +\right.\right.$$

---

* Фундаментальные матрицы для такого уравнения в случае постоянной матрицы A второго и третьего порядков построены в [4, 5].

$$+\sum_{q=1}^{r}(-1)^q\left(\frac{|x-\xi|}{2\sqrt{-\nu_i(\xi)}}\right)^{r-q}\sum_{j_q=1}^{r-1}\sum_{j_{q-1}=q-1}^{j_q-1}\cdots\sum_{j_1=1}^{j_2-1}\left(\frac{j_{\nu+1}+\nu}{2}\right)\lambda^{r-q}\Bigg]\times$$

$$\times\exp\left(-\lambda\frac{|x-\xi|}{\sqrt{-\nu_i(\xi)}}\right), \tag{5}$$

$|x-\xi|$ — длина вектора $x-\xi$,

$$B_{sk}^{(i,j)}(\xi)=\frac{1}{(j-1)!}\frac{\partial^{j-1}}{\partial\nu^{j-1}}\left.\frac{\Delta_{sk}(1,\nu)}{\prod\limits_{\substack{r=1\\r\neq i}}^{p}(\nu-\nu_r(\xi))}\right|_{\nu=\nu_i(\xi)}\qquad(j=1,\ldots,m_i), \tag{6}$$

$\Delta_{ks}(\beta,\nu)$ — алгебраическое дополнение элемента (k, s) в определителе $\Delta(\beta,\nu)$.

Формулу (5) можно записать в более обозримом виде:

$$P_{0ks}(x-\xi,\xi,\lambda)=$$

$$=-\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{B_{sk}^{(i,j)}(\xi)}{(m_i-j+1)!}\frac{\partial^{m_i-j}}{\partial\nu^{m_i-j}}\left.\frac{\exp\left[-\lambda\frac{|x-\xi|}{\sqrt{-\nu}}\right]}{\nu}\right|_{\nu=\nu_i(\xi)}. \tag{7}$$

В частности, если все корни $\nu_i(x)$ характеристического уравнения (2) простые ($m_i=1$; $i=1,2,\ldots,m=p$), из (7) с учетом (6) имеем

$$P_{0ks}(x-\xi,\xi,\lambda)=-\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\sum_{i=1}^{m}\frac{\Delta_{sk}(1,\nu_i(\xi))}{\prod\limits_{\substack{r=1\\r\neq i}}^{p}(\nu_i(\xi)-\nu_r(\xi))}\exp\left[-\lambda\frac{|x-\xi|}{\sqrt{-\nu_i(\xi)}}\right]. \tag{8}$$

Согласно условию для корней $\nu_i(\xi)$ характеристического уравнения, имеют место неравенства (3) и, следовательно, существует положительное число δ такое, что при всех $x,\xi\in\bar D$ имеют место оценки

$$\left|\frac{\partial^k P_0(x-\xi,\xi,\lambda)}{\partial x_i^k}\right|\leqslant\frac{CB\exp(-\varepsilon|\lambda||x-\xi|)}{|x-\xi|^{k+1}}\qquad(k=0,1,2); \tag{9}$$

$$\left|\frac{\partial P_0(x-\xi,\xi,\lambda)}{\partial\xi_i}\right|\leqslant\frac{CB\exp(-2\varepsilon|\lambda||x-\xi|)}{|x-\xi|^2}; \tag{10}$$

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x_i^k}\left(\frac{\partial P_0(x-\xi,\xi,\lambda)}{\partial x_i}+\frac{\partial P_0(x-\xi,\xi,\lambda)}{\partial\xi_i}\right)\right|\leqslant\frac{CB\exp(-\varepsilon|\lambda||x-\xi|)}{|x-\xi|^{1+k}}\quad(k=0,1), \tag{11}$$

где λ — любое значение из области R_δ:

$$|\lambda|\geqslant R,\qquad|\arg\lambda|\leqslant\pi/4+\delta; \tag{R_δ}$$

C, R — достаточно большие положительные постоянные; B — квадратная матрица порядка m, составленная из единиц; ε — некоторое положительное постоянное; неравенства (9)—(11) имеют место между соответствующими элементами левых и правых частей.

Фундаментальная матрица $P(x,\xi,\lambda)$ системы (1) с особенностью в точке $x=\xi$ строится методом Леви — Карлемана ([6], [7]) в виде

$$P(x,\xi,\lambda)=P_0(x-\xi,\xi,\lambda)+\int\limits_D P_0(x-\eta,\eta,\lambda)h(\eta,\xi,\lambda)\,dD_\eta, \tag{12}$$

где $h(\eta,\xi,\lambda)$ — неизвестная плотность интегрального довеска

$$P_1(x,\xi,\lambda)=\int\limits_D P_0(x-\eta,\eta,\lambda)h(\eta,\xi,\lambda)\,dD_\eta. \tag{13}$$

Подставляя (12) в левую часть уравнения (1) и (с учетом (9)—(11)) приравнивая нулю полученное выражение, приходим к интегральному уравнению

$$h(x, \xi, \lambda) = K(x, \xi, \lambda) + \int_D K(x, \eta, \lambda)\, h(\eta, \xi, \lambda)\, dD_\eta, \tag{14}$$

где

$$K(x, \xi, \lambda) = \left\{(A(x) - A(\xi))\,\Delta_x + \sum_{i=1}^{3} A_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + A_0(x)\right\} P_0(x-\xi, \xi, \lambda).$$

Согласно (9) при сделанных ограничениях для ядра имеет место неравенство

$$|K(x, \xi, \lambda)| \leqslant CB\exp(-2\varepsilon|\lambda|\,|x-\xi|)\ /\ |x-\xi|^2, \tag{15}$$

выполняемое в области R_δ.

Оценка (15) позволяет строить решение $h(x, \xi, \lambda)$ интегрального уравнения (14) в области R_δ методом последовательных приближений

$$h(x, \xi, \lambda) = K(x, \xi, \lambda) + \sum_{n=2}^{\infty} K_n(x, \xi, \lambda), \tag{16}$$

где K_n — итерации ядра K, причем для h имеет место оценка

$$|h(x, \xi, \lambda)| \leqslant CB\exp(-\varepsilon|\lambda|\,|x-\xi|)\ /\ |x-\xi|^2, \tag{17}$$

справедливая в области R_δ.

Таким образом доказывается

Теорема. *При сделанных ограничениях существует положительное число δ такое, что для достаточно большого R при всех комплексных значениях λ, удовлетворяющих неравенствам* (R_δ), *система* [1] *имеет фундаментальную матрицу $P(x, \xi, \lambda)$ вида* (12), *аналитическую по λ в области* R_δ, *где при $x, \xi \in \bar{D}$ имеют место неравенства* ~~(9)~~, ~~(11)~~ *и оценки*

$$|P_1(x, \xi, \lambda)| \leqslant CB\exp(-\varepsilon|\lambda|\,|x-\xi|)\ /\ \lambda|x-\xi|,$$

$$|\partial^k P_1(x, \xi, \lambda)/\partial x_i^k| \leqslant CB\exp(-\varepsilon|\lambda|\,|x-\xi|)/|x-\xi|^k \quad (k=1,2),$$

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x_i^k}\left[\frac{\partial P(x, \xi, \lambda)}{\partial x_i} + \frac{\partial P_0(x-\xi, \xi, \lambda)}{\partial \xi_i}\right]\right| \leqslant \frac{CB\exp(-\varepsilon|\lambda|\,|x-\xi|)}{|x-\xi|^{1+k}},$$

$$|\partial^k P(x, \xi, \lambda)/\partial x_i^k| \leqslant CB\exp(-\varepsilon|\lambda|\,|x-\xi|/|x-\xi|^{1+k} \quad (k=0,1,2).$$

Если $\Phi(x)$ — вектор-функция, имеющая в D ограниченные непрерывные производные первого порядка по всем своим аргументам, то вектор-функция

$$u(x, \lambda, \Phi) = -\int_D P(x, \xi, \lambda)\,\Phi(\xi)\,dD_\xi$$

при всех λ, принадлежащих R_δ, является решением неоднородного уравнения

$$A(x)\,\Delta u + \sum_{i=1}^{3} A_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + (A_0(x) - \lambda^2)\,u = \Phi(x).$$

Аналогичная теорема имеет место также для случая области D произвольного числа измерений больше единицы с соответствующими усложнениями приведенных формул и оценок, причем $P_{0hs}(x-\xi, \xi, \lambda)$ выражается через функцию Бесселя.

Азербайджанский государственный университет
им. С. М. Кирова
Баку

Поступило
26 XI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Б. Лопатинский, Укр. матем. журн., 3, 3 (1951). [2] Д. Ф. Мельник, Наук. зап. ЛДУ, сер. мех.-матем., 8 (1958). [3] М. Л. Расулов, Метод контурного интеграла, «Наука», 1964. [4] М. Л. Расулов, ДАН, 177, №6 (1967). [5] М. Л. Расулов, ДАН, 180, № 5 (1968). [6] Э. Э. Леви, УМН, в. 8 (1941). [7] T. Carleman, Ber. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig, Math.-phys. Klasse, 88 (1936).