Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 6

УДК 513.83+519.54

МАТЕМАТИКА

В. В. ФЕДОРЧУК

РАВНОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И СОВЕРШЕННЫЕ НЕПРИВОДИМЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 15 XII 1969)

В заметке вводится понятие θ-равномерного пространства. Это понятие обобщает понятие равномерного пространства, совместимого с данным топологическим пространством. θ-Равномерности существуют на каждом хаусдорфовом пространстве. Так же как каждая равномерность естественным образом порождает близость, каждая θ-равномерность порождает θ-близость *.

Как и для θ-близостей, имеется взаимно однозначное соответствие между θ-равномерностями на данном топологическом пространстве и равномерностями на его вполне регулярных прообразах относительно θ-совершенных неприводимых отображений. При этом обычные равномерности выделяются среди всех θ-равномерностей как проективные объекты относительно класса равномерных регулярных θ-отображений.

§ 1. Будем говорить, что система $v = \{V\}$ канонически открытых подмножеств топологического пространства X является θ-покрытием пространства X локально конечного типа, если для любой точки $x \in X$ существует такой конечный набор $V_1, \ldots, V_n$ элементов системы v, что $x \in \left\langle \bigcup\limits_{i=1}^{n} [V_i] \right\rangle$.

Большой запас θ-покрытий локально конечного типа дает нам

Лемма 1. *Пусть $f\colon Y \to X$ — θ-совершенное неприводимое отображение и $v = \{V\}$ — покрытие пространства Y канонически открытыми множествами. Тогда система $f^\# v = \{f^\# V \mid V \in v\}$ будет θ-покрытием локально конечного типа пространства X.*

Семейство $\mathfrak{V} = \{v\}$ θ-покрытий локально конечного типа топологического пространства X называется θ-равномерностью, если выполнены следующие аксиомы:

I_U. Если θ-покрытие $v \in \mathfrak{V}$ вписано в θ-покрытие локально конечного типа w, то $w \in \mathfrak{V}$.

II_U. Для любых двух θ-покрытий $u, v \in \mathfrak{V}$ существует θ-покрытие $w \in \mathfrak{V}$, которое звездно вписано как в θ-покрытие u, так и в θ-покрытие v.

III_U. Если x, y — различные точки пространства X, то существуют такие окрестности G и H этих точек и такое θ-покрытие $v \in \mathfrak{V}$, что $H \cap \mathrm{st}_v G = \phi$.

IV_U. Для любой точки $x \in X$ и для всякой ее канонически открытой окрестности G существует такая окрестность H точки x и такое θ-покрытие $v \in \mathfrak{V}$, что $\mathrm{st}_v H \subset G$. Таким образом, если в аксиомах θ-равномерности θ-покрытия локально конечного типа заменить покрытиями, получится один из вариантов аксиом отделимой равномерности, совместимой с данной топологией.

* Подробно θ-близости изучаются в работе (1), терминологией и обозначениями которой мы пользуемся и здесь.

Топологическое пространство X, наделенное θ-равномерностью $\mathfrak{B}$, называется **θ-равномерным пространством** $(X, \mathfrak{B})$. **Фундаментальной системой или базисом θ-равномерности** называется всякое множество $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}$, обладающее тем свойством, что во всякое θ-покрытие $v \in \mathfrak{B}$ можно вписать θ-покрытие $v_1 \in \mathfrak{B}_1$. По фундаментальной системе θ-равномерность однозначно восстанавливается в силу аксиомы I_{U}.

Всякая отделимая равномерность является θ-равномерностью. На экстремально несвязном пространстве всякая θ-равномерность является равномерностью, так как всякое θ-покрытие локально конечного типа экстремально несвязного пространства является покрытием. Примером θ-равномерности на произвольном хаусдорфовом пространстве X служит θ-равномерность, базисом которой является система всех конечных θ-покрытий канонически открытыми множествами.

Всякая θ-равномерность $\mathfrak{B}$ на пространстве X порождает θ-близость: $A\theta B \Longleftrightarrow$ существуют такие окрестности C и D множеств A и B соответственно и такое θ-покрытие $v \in \mathfrak{B}$, что $C \cap \mathrm{st}_v D = \phi$. Эту θ-близость будем обозначать символом $\theta_{\mathfrak{B}}$.

Самый общий пример θ-равномерности дает:

Теорема 1. *Пусть f: $Y \to X$ — θ-совершенное неприводимое отображение вполне регулярного пространства Y на пространство X. Пусть на пространстве Y задана равномерность $\mathfrak{B}$. Тогда семейство $f^{\#}\mathfrak{B} = \{f^{\#}v \mid v \in \mathfrak{B}$, v состоит из канонически открытых множеств$\}$ является θ-равномерностью на пространстве Y. При этом* $\theta_{f^{\#}\mathfrak{B}} = f\delta_{\mathfrak{B}}$ *.

Следующая теорема показывает, что существует только одна равномерность, порождающая данную θ-равномерность.

Теорема 2. *Пусть f_i: $Y_i \to X$ — θ-совершенные неприводимые отображения вполне регулярных пространств на пространство X, $i = 1, 2$. Пусть на пространствах Y_i заданы такие равномерности $\mathfrak{B}_i$, что $f_1{}^{\#}\mathfrak{B}_1 = f_2{}^{\#}\mathfrak{B}_2$. Тогда существует такой равномерно непрерывный в обе стороны гомеоморфизм h: $Y_1 \to Y_2$, что $f_1 = f_2 h$.*

Теорема 3 утверждает, что каждая θ-равномерность порождается некоторой равномерностью, единственной в силу теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть $(X, \mathfrak{B})$ — θ-равномерное пространство. Существует такое равномерное пространство $(X_{\mathfrak{B}}, \widetilde{\mathfrak{B}})$ и такое θ-совершенное неприводимое отображение $\pi_{\mathfrak{B}}: X_{\mathfrak{B}} \to X$, что $\mathfrak{B} = \pi_{\mathfrak{B}}^{\#}\widetilde{\mathfrak{B}}$.*

§ 2. Отображение f: $(X, \mathfrak{B}) \to (Y, \mathfrak{W})$ называется **θ-равномерно непрерывным**, если: 1) для любого θ-покрытия $w \in \mathfrak{W}$ существует такое θ-покрытие $v \in \mathfrak{B}$, что покрытие $\{f[V] \mid V \in v\}$ вписано в покрытие $\{[W] \mid W \in \mathfrak{W}\}$; 2) семейство $\{\langle [f^{-1}W] \rangle \mid W \in w\}$ является равномерным θ-покрытием пространства $(X, \mathfrak{B})$.

Лемма 2. *Если f: $(X, \mathfrak{B}) \to (Y, \mathfrak{W})$ — θ-равномерно непрерывное отображение, отображение f: $(X, \theta_{\mathfrak{B}}) \to (Y, \theta_{\mathfrak{W}})$ θ-близостно непрерывно.*

Следующая теорема аналогична теореме 4 работы (1) и доказывается с ее помощью.

Теорема 4. *Пусть f: $(X, \mathfrak{B}) \to (Y, \mathfrak{W})$ — θ-равномерно непрерывное отображение на регулярное пространство Y. Тогда существует такое равномерное непрерывное отображение $\tilde{f}$: $(X_{\mathfrak{B}}, \widetilde{\mathfrak{B}}) \to (Y_{\mathfrak{W}}, \widetilde{\mathfrak{W}})$, что коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} X_{\mathfrak{B}} & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y_{\mathfrak{W}} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathfrak{B}}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathfrak{W}}} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

---

* Через $\delta_{\mathfrak{B}}$ обозначается близость, порождаемая на пространстве Y равномерностью $\mathfrak{B}$, а через $f\delta_{\mathfrak{B}}$ — θ-близость, порождаемая на X этой близостью и отображением f: $Y \to X$ (см. теорему 1 работы (1)).

Замечание. Требование регулярности пространства Y в этой теореме можно ослабить лишь до требования непрерывности отображения f, так как существует пример, показывающий, что теорема 4 работы ([1]), которая вытекает из данной теоремы, перестает быть верной, если отказаться от регулярности пространства Y. Отказаться от регулярности пространства Y можно для замкнутых и неприводимых отображений.

Теорема 5. *Пусть* $f\colon (X, \mathfrak{B}) \to (Y, \mathfrak{W})$ — *θ-равномерно непрерывное отображение пространства X на пространство Y. Пусть кроме того отображение f замкнуто* и неприводимо. Тогда существует такое равномерно непрерывное отображение* $\tilde{f}\colon (X_{\mathfrak{B}}, \tilde{\mathfrak{B}}) \to (Y_{\mathfrak{W}}, \tilde{\mathfrak{W}})$, *что* $\pi_{\mathfrak{W}}\tilde{f} = f\pi_{\mathfrak{B}}$. *Если при этом отображение f бикомпактно, то отображение $\tilde{f}$ совершенно и неприводимо.*

Отображение $f\colon (X, \mathfrak{B}) \to (Y, \mathfrak{W})$ называется θ-равномерно регулярным, если оно θ-равномерно непрерывно и для каждого равномерного θ-покрытия $v \in \mathfrak{W}$ существует равномерное θ-покрытие $w \in \mathfrak{B}$, которое вписано в систему $f^{\#}v$.

Будем называть θ-совершенное неприводимое отображение $f\colon (X, \mathfrak{B}) \to (Y, \mathfrak{W})$ равномерным θ-отображением, если отображение f θ-равномерно непрерывно. Наконец, θ-равномерно регулярное равномерное θ-отображение будем называть равномерным регулярным θ-отображением.

Теорема 6. *Равномерное пространство* $(X_{\mathfrak{B}}, \tilde{\mathfrak{B}})$ *является проективным объектом в классе всех θ-равномерных пространств* $(Y, \mathfrak{W})$, *отображающихся на пространство* $(X, \mathfrak{B})$ *посредством равномерных регулярных θ-отображений. При этом, если* $f\colon (Y, \mathfrak{W}) \to (X, \mathfrak{B})$ *равномерное регулярное θ-отображение, то в коммутативной диаграмме*

$$\begin{array}{ccc} Y_{\mathfrak{W}} & \xrightarrow{\tilde{f}} & X_{\mathfrak{B}} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathfrak{W}}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathfrak{B}}} \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

отображение $\tilde{f}$ является равномерно непрерывным в обе стороны гомеоморфизмом.

Из этой теоремы вытекает теорема о θ-абсолюте (см. ([1])), так как всякое регулярное θ-отображение является равномерным регулярным θ-отображений относительно прекомпактных θ-равномерностей.

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
10 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Федорчук, Матем. сборн., 76 (118), 4, 513 (1968). [2] В. Федорчук, ДАН, 180, № 3 (1968).

* Здесь замкнутость отображения f не предполагает его непрерывности.