Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 6

УДК 513.882 *МАТЕМАТИКА*

Р. Л. ФРУМ-КЕТКОВ

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком П. С. Александровым 4 XII 1969)

Основной целью данной работы является распространение теории степени отображения Лере — Шаудера на класс отображений M в гильбертовом пространстве. Определение класса M приведено в п. 2. Отображения этого класса естественно называть почти-монотонными отображениями. В класс M входят, в частности, отображения вида $\varphi + \Phi$, где φ — монотонное отображение, Φ — вполне непрерывное отображение. Приводятся ряд теорем о неподвижной точке и теорема о сохранении области.

1. Ниже через H всегда обозначается вещественное гильбертово пространство. Все рассматриваемые отображения предполагаются непрерывными. Через I обозначается тождественное отображение, через $\Phi(\Phi_i)$ — вполне непрерывные отображения.

Так как приходится рассматривать отображения класса M, непрерывно зависящие от параметра, то удобно дать определение класса M, когда областью определения является замкнутое множество в пространстве $E = H \times R$, где R — компактное метрическое пространство. Мы будем обычно полагать $R = [0, 1]$. Через E всегда обозначается пространство указанного вида. Точки из E будем обозначать буквой z, точки из H — буквой x. Заменяя в тех определениях и предложениях, где участвует E, букву z на x, E — на H, мы получим соответствующее определение или предложение для H. Это позволяет сократить соответствующие формулировки.

2. Определение 1. Пусть A — ограниченное замкнутое множество в E, f — отображение A в H. Скажем, что $f \in M(A)$, если выполнены следующие условия: 1) $f(A)$ — ограниченное множество; 2) если A — некомпактное множество, то для любого некомпактного множества $B \subset A$

$$\limsup_{z, z' \in B} (f(z) - f(z'),\ x - x') > 0,$$

где $z = (x, t)$; $z' = (x', t')$; $x, x' \in H$; $t, t' \in R$.

Таким образом, если A — ограниченное некомпактное замкнутое множество в гильбертовом пространстве H, то условие 2) означает, что для любого некомпактного множества $B \subset A$

$$\limsup_{x, y \in B} (f(x) - f(y),\ x - y) > 0.$$

В гильбертовом пространстве в класс $M(A)$ входят отображения вида $\varphi + \Phi$, где φ — строго монотонное отображение, т. е. отображение, удовлетворяющее условию

$$(\varphi(x) - \varphi(y),\ x - y) \geqslant \alpha(r) > 0, \quad r = \|x - y\|.$$

Строго монотонным отображением является отображение вида $I - K$, где K удовлетворяет условию

$$(K(x) - K(y), x - y) \leqslant q(r)\|x - y\|^2, \quad r = \|x - y\|, \quad q(r) < 1.$$

Определение 2. Пусть A — ограниченное замкнутое множество в E, $f_1, f_2 \in M(A)$. Скажем, что f_1 гомотопно f_2 в классе M, если существует такая гомотопия $g(z, t)$, $z \in A$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, связывающая f_1 и f_2, что $g(z, t)$ является отображением класса $M(C)$, $C = A \times [0, 1]$. Соответствующая гомотопия называется гомотопией в классе M.

Ниже в предложении 1 через $L(\lambda)$ обозначается класс отображений $E \to H$, представимых в виде $\lambda(z)x + \Phi(z)$, $z = (x, y)$, где $\lambda(z)$ — действительная функция, удовлетворяющая условию $0 < c_1 < \lambda(z) < c_2 < \infty$.

Предложение 1. *Пусть A — ограниченное замкнутое множество в E. Тогда: 1) $M(A)$ является выпуклым множеством. 2) Если $f \in M(A)$ и g_λ, g_μ — отображения класса $L(\lambda)$, то отображение $g_\lambda f g_\mu + \Phi$ также является отображением класса $M(A)$. 3) Если $f \in M(A)$, то $f(A)$ — замкнутое множество и для любого компакта F множество $f^{-1}(F) \cap A$ является компактом.*

3. Через $T(H)$ обозначим множество всех конечномерных подпространств H. $T(H)$ упорядочено по включению. Если $T \in T(H)$, то через DT обозначаем ортогональное дополнение к T, через $p_T(p_{DT})$ — ортогональную проекцию на T (соответственно на DT).

Пусть G — ограниченное открытое множество в H, $\overline{G}$ — его замыкание, Γ — граница G, f — непрерывное отображение $\overline{G} \to H$. Для любого конечномерного подпространства T через $G(T)$ обозначим $G \cap T$, через $\Gamma(T)$ — границу в T открытого множества $G(T)$. Если $G(T)$ не пусто, то через f_T обозначим отображение $\overline{G(T)} \to T$, определяемое следующим образом: $f_T(x) = p_T f(x)$, $x \in T \cap \overline{G}$ (p_T — ортогональная проекция на T). Если $a \in T \setminus f_T(\Gamma \cap T)$, то определена степень отображения f_T, рассматриваемого на множестве $G \cap T$, в точке a, которую мы обозначим $c(f_T, a, G \cap T)$.

Пусть a — такая точка в H, что a лежит вне $f(\Gamma)$. Скажем, что f (рассматриваемое на G) имеет степень отображения $c(f, a, G)$ в точке a по Z, если выполнены следующие условия:

а) Существует такое $T_0 \in T(H)$, содержащее a, что для любого $T \supseteq T_0$ множество $f_T(\Gamma \cap T)$ не содержит a, т. е. для любого $T \supseteq T_0$ определено значение $c(f_T, a, G \cap T)$.

б) Значения $c(f_T, a, G \cap T)$ стабилизуются по Z, т. е. существует такое $T_1 \in T(H)$, что $c(f_T, a, G \cap T) = c(f, a, G)$, если $T \supseteq T_1$.

Отметим, что если выполнено условие 1), то имеет место стабилизация $c(f_T, a, G \cap T)$ по модулю 2, но, вообще говоря, стабилизации по Z может и не быть, см. ([2]).

Ниже до конца заметки под степенью отображения понимается степень отображения по Z.

4. Для отображений класса M степень отображения определена во всех точках, лежащих вне образа границы, и вычисление степени отображения сводится к вычислению степени отображения вида $I - \Phi$. Именно, имеет место следующее

Предложение 2. *Пусть G — ограниченное открытое множество в H, Γ — граница G, $f: \overline{G} \to H$ и $f \in M(\overline{G})$. Тогда $f(\Gamma)$ — замкнутое множество, и для любой точки a, лежащей вне $f(\Gamma)$, существует такая окрестность U в H и такое $T_0 \in T(H)$, что: 1) для любой точки $b \in U$ определена степень отображения $c(f, b, G)$, и это значение постоянно на U; 2) для любого $b \in U$ и любого $T \supseteq T_0$ $c(f, b, G)$ совпадает со степенью отображения $I + p_T(f - I)$ в точке b.*

В классе M степень отображения обладает всеми основными свойствами степени отображения (см., например, ([1]) § 1): 1) аддитивностью; 2) $a \in f(G)$, если $c(f, a, G) \neq 0$; 3) степень $c(f, a, G)$ остается постоянной при непрерывной деформации области G и отображения f (в классе M), если a лежит вне образа границы при этой деформации.

Для отображений класса M имеет место классификационная теорема.

Предложение 3. *Пусть G — ограниченное открытое множество в H; Γ — граница G; f_1, f_2 — отображения класса $M(\overline{G})$. Пусть $f_2(\Gamma) \cup f_2(\Gamma)$ не содержит точки a, $c_1 = c(f_1, a, G)$, $c_2 = c(f_2, a, G)$. Равенство $c_1 = c_2$ име-*

ет место тогда и только тогда, когда существует гомотопия $g(x, t)$ в классе M, связывающая f_1 и f_2, для которой $\inf \|g(x, t) - a\| > 0$, $x \in \Gamma$, $0 \leqslant \leqslant t \leqslant 1$.

Пусть A — ограниченное замкнутое множество в E, f — отображение A в H класса $M(A)$, $T \in T(H)$. Определим отображение $\psi[f, T]$ следующим образом:

$$\psi[f, T](x, t) = f(x) + tp_{DT}(x - f(x)), \quad x \in A, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Отображение $\psi[f, T]$ определено на $A \times [0, 1]$ и является отображением класса M. Имеем $\psi[f, T](x, 0) = f(x)$ и $\psi[f, T](x, 1) = = x + p_T[f(x) - x]$, т. е., если рассматривать t как параметр деформации, то $\psi[f, T]$ — это деформация в классе M, переводящая f в отображение $I + p_T(f - I)$.

Доказательство приведенных выше предложений основано на следующем предложении:

Предложение 4. *Пусть A — ограниченное замкнутое множество в E, f — отображение A в H класса $M(A)$. Для любой точки a, лежащей вне $f(A)$, существует такое $T_0 \in T(H)$, содержащее точку a, и такое $\varepsilon > 0$, что для любого $T \supseteq T_0$ $\|p_T\psi(f, T_0)(x, t) - a\| > \varepsilon$, если $x \in T \cap A$, $0 \leqslant \leqslant t \leqslant 1$.*

5. Пусть A — замкнутое ограниченное множество в E. Через $M_0(A)$ обозначим множество непрерывных отображений $A \to H$, которое является замыканием в равномерной метрике множества $M(A)$. Если A лежит в H, то это эквивалентно тому, что $f(A)$ — ограниченное множество и для любого некомпактного множества $B \subset A$ $\limsup\limits_{x, y \in B} (f(x) - f(y), x - y) \geqslant \geqslant 0$. В класс M_0 входят, например, отображения вида $I - K - \Phi$, где $\|K(x) - K(y)\| \leqslant \|x - y\|$. Пусть G — ограниченное открытое множество в H; Γ — граница G; f: $\overline{G} \to H$. Если $f \in M_0(\overline{G})$, то множество $f(\Gamma)$, вообще говоря, может быть незамкнутым множеством, и степень отображения f определяется во всех точках, лежащих вне $\overline{f(\Gamma)}$, следующим образом.

Для любой точки a, лежащей вне $\overline{f(\Gamma)}$, существуют такие $\lambda(a) > 0$ и окрестность $U(a)$, что для любого λ, удовлетворяющего условию $0 < < \lambda < \lambda(a)$, отображение $f_\lambda = f + \lambda I$ имеет степень отображения во всех точках из $U(a)$ и степень этого отображения от λ не зависит. Это значение и принимается за $c(f, a, G)$.

Заменяя в определении 2 M на M_0, получаем определение гомотопии в классе M_0. В классе M_0 также справедлива классификационная теорема (предложение 3), нужно лишь вместо $f_i(\Gamma)$ писать везде $\overline{f_i(\Gamma)}$.

6. Для отображений класса M справедлива теорема об инвариантности области:

Предложение 5. *Пусть G — открытое ограниченное множество в H, f — гомеоморфное отображение G в H. Если для любого замкнутого множества $A \subset G$ $f \in M(A)$, то $f(G)$ — открытое множество.*

Ниже приводится ряд предложений о неподвижной точке.

Предложение 6. *Пусть Q — открытое ограниченное выпуклое множество в H; Γ — граница Q; f: $\overline{Q} \to H$. Пусть $f \in M(\overline{Q})$ и a — такая точка из Q, что уравнение $f(x) = \lambda(x - a)$ не имеет решений при $x \in \Gamma$ и любом $\lambda \geqslant 0$ (или при любом $\lambda \leqslant 0$). Тогда $f(Q)$ содержит точку a.*

Из предложения 6 немедленно следует

Предложение 7. *Пусть Q — открытое ограниченное выпуклое множество в H; Γ — граница Q; f — такое отображение $\overline{Q} \to H$, что $I - f$ является отображением класса $M(\overline{Q})$. Тогда f имеет в Q неподвижную точку, если выполнено одно из двух условий:* а) $f(\Gamma) \subseteq \overline{Q}$; б) *$\overline{Q}$ является шаром и $(f(x), x) \neq (x, x)$ для $x \in \Gamma$.*

Следующее предложение обобщает теорему Борсука — Люстерника — Шнирельмана:

Предложение 8. *Пусть* S — *сфера в* H *с центром в точке* O; f — *такое отображение класса* $M(S)$, *что уравнение* $f(x) = \lambda f(-x)$ *не имеет решений на* S *при любом* $\lambda \geqslant 0$. *Тогда степень отображения* f *относительно точки* O *нечетна.*

Предложение 9 является обобщением теоремы Браудера (³).

Предложение 9. *Пусть* f — *такое отображение* H *в* H, *что отображение* $I - f$ *является отображением класса* $M(A)$ *для любого замкнутого множества* A. *Если для некоторого положительного целого* m *итерация* $f^m(H)$ *ограничена, то* f *имеет неподвижную точку.*

Выражаю благодарность А. С. Шварцу и В. Г. Болтянскому за обсуждение вопросов, рассмотренных в данной работе.

Поступило
28 XI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ж. Лерей, Ю. Шаудер, УМН, 1, в. 3—4 (1946). [2] Р. Л. Фрум-Кетков, ДАН, 175, № 6 (1967). [3] F. E. Browder, Duke Math. J., 26, 291 (1959).