**УДК 519.2**

***Е. Г. Хавханова***

# ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ СЕТИ ДЖЕКСОНОВСКОГО ТИПА С ДВУМЯ УЗЛАМИ

*Рассматривается сеть массового обслуживания джексоновского типа с двумя узлами и с ограниченным временем пребывания заявок в узлах. Составлено уравнение трафика и найдено его решение, также уравнение глобального и локального равновесия. Показано, что рассматриваемая марковская цепь является регулярной, консервативной и неприводимой. Установлено условие эргодичности, найдено единственное стационарное распределение вероятностей состояний, совпадающее с эргодическим.*

## 1 Введение

Математическая теория массового обслуживания – это раздел теории случайных процессов, возникающих при поступлении заявок на обслуживание к некоторому устройству. Она находит широкое применение в различных областях, таких как транспорт, телекоммуникации, банковское дело, здравоохранение и другие. Основные компоненты системы массового обслуживания включают поток заявок, устройство обслуживания, очередь, система управления [1].

## 2 Постановка задачи

Исследована открытая марковская сеть с двумя узлами. Времена обслуживания заявок в различных узлах независимы, не зависят от процесса поступления заявок и имеют показательное распределение с параметрами $\mu, i = 1, 2$. Для определенности будем предполагать, что запросы обслуживаются в порядке поступления в узлы (дисциплина FCFS). Количество мест для ожидания в узлах бесконечное. В первый узел открытой сети поступает простейший поток с интенсивностью $\lambda_1$ соответственно. Заявка, обслуженная в первом узле, мгновенно и независимо от других заявок, с вероятностью $\frac{1}{4}$ направится во второй узел, с вероятностью $\frac{3}{4}$ покидает сеть. Во второй узел открытой сети поступает простейший поток с интенсивностью $\lambda_2$ соответственно. Заявка, обслуженная во втором узле, мгновенно и независимо от других заявок, с вероятностью $\frac{1}{2}$ направится в первый узел, с вероятностью $\frac{1}{2}$ покидает сеть. Состояние сети в момент времени *t* описывается векторным случайным процессом $\vec{n}(t) = (n_1(t), n_2(t)),$ где $\vec{n}(t)$ – число заявок в *i*-ом узле в момент *t*. Очевидно, что $\vec{n}(t)$ – цепь Маркова с непрерывным временем.

Схема сети представлена на рисунке 1.

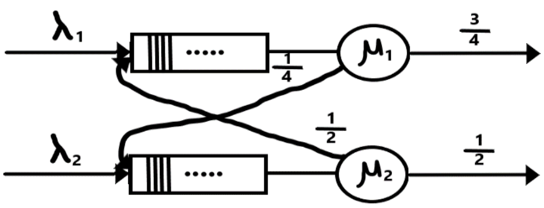


Рисунок 1 – Схема сети для процесса $n(t)$

## 3 Основные результаты

Для марковского процесса составлено следующее уравнение трафика и найдено его решение, где $\lambda\varepsilon_i = \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2$ – полная интенсивность поступления заявок в $i$-узел $(i = 1, 2)$. Система уравнений трафика принимает следующий вид

$$\begin{cases} \lambda\varepsilon_1 = \lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda\varepsilon_2 \\ \lambda\varepsilon_2 = \lambda_2 + \frac{1}{4}\lambda\varepsilon_1 \end{cases}$$

Найденное решение:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{4\lambda_2}{7\lambda} + \frac{8\lambda_1}{7\lambda} \\ \varepsilon_2 = \frac{8\lambda_2}{7\lambda} + \frac{2\lambda_1}{7\lambda} \end{cases}$$

Для марковского процесса составлено следующее уравнение глобального равновесия

$$P(n_1, n_2)\left[\lambda + \sum_{i=2}^{2}\mu_i I_{\{n_i=0\}}\right] = P(n_1 - 1, n_2)\lambda_1 I_{\{n_1\neq 0\}} + P(n_1, n_2 - 1)\lambda_2 I_{\{n_2\neq 0\}} +$$
$$+\frac{3}{4}P(n_1+1, n_2)\mu_1 + \frac{1}{2}P(n_1, n_2+1)\mu_2 + \frac{1}{4}P(n_1+1, n_2-1)\mu_1 I_{\{n_2\neq 0\}} + \frac{1}{2}P(n_1-1, n_2+1)\mu_2 I_{\{n_1\neq 0\}}$$

$p_{ii}$ – вероятность перейти из $i$-го узла в самого себя, в данной сети, ни один узел не переходит сам в себя, поэтому $p_{ii} = 0, (i = 1, 2)$.

Для составления уравнений локального равновесия глобальное уравнение разбивается на локальные уравнения путем приравнивания соответствующих слагаемых:

$$(\lambda_1 + \lambda_2)P(n_1, n_2) = \frac{3}{4}P(n_1+1, n_2)\mu_1 + \frac{1}{2}P(n_1, n_2+1)\mu_2,$$

$$P(n_1, n_2)\sum_{i=1}^{2}\mu_i(n_i) = P(n_1-1, n_2)\lambda_1 I_{\{n_1\neq 0\}} + \frac{1}{4}P(n_1+1, n_2-1)\mu_1 I_{\{n_2\neq 0\}} + \frac{3}{4}P(n_1+1, n_2)\mu_1 +$$
$$+P(n_1, n_2-1)\lambda_2 I_{\{n_2\neq 0\}} + \frac{1}{2}P(n_1-1, n_2+1)\mu_2 I_{\{n_1\neq 0\}} + \frac{1}{2}P(n_1, n_2+1)\mu_2.$$

Стационарное распределение вероятностей состояний $\{P(n_1, n_2), (n_1, n_2) \in X\}$ может быть найдено по теореме Джексона.

Стационарное распределение вероятностей состояний $i$-го $(i = 1, 2)$ изолированного узла сети. Пусть $p_i = \frac{\varepsilon_i\lambda}{\mu_i}$ и так, как в сеть поступает простейший поток, стационарное распределение вероятностей состояний $i$-го $(i = 1, 2)$ изолированного узла сети примет вид

$$P(n_1, n_2) = \prod_{i=1}^{2}(1 - p_i)\cdot p_i^{n_i},$$

где

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{\lambda}{\mu_1}\left(\dfrac{4\lambda_2}{7\lambda} + \dfrac{8\lambda_1}{7\lambda}\right), \\ p_2 = \dfrac{\lambda}{\mu_2}\left(\dfrac{8\lambda_2}{7\lambda} + \dfrac{2\lambda_1}{7\lambda}\right). \end{cases}$$

Выполним проверку, подставив полученное стационарное распределение в систему локальных уравнений. Система совпала с системой уравнения трафика. Это говорит о том, что стационарное распределение было найдено верно.

Стационарное распределение $p(n_1, n_2)$ существует и единственно, если выполняется условие эргодичности. Для исследования эргодичности применим эргодическую теорему Фостера [2]. Проверим все условия теоремы.

Достаточным условием регулярности является:

$$\sup q_n < +\infty (\forall n \in X \exists C : Cq_n \le C).$$

В нашем случае: $\sup q\left(\vec{n}\right) \le \lambda + \mu_1 + \mu_2 = C.$ То есть условие регулярности выполняется.

Для проверки консервативности составим интенсивности переходов для процесса $n(t)$. Положим, что $\vec{n} = (n_1, n_2);$ $\vec{e_1} = (1,0);$ $\vec{e_2} = (0,1).$ Интенсивности переходов процесса $n(t)$ имеют вид

$$q\left(\vec{n}\right) = \lambda + \mu_1 I_{\{n_1 \ne 0\}} + \mu_2 I_{\{n_2 \ne 0\}}$$

$$q\left(\vec{n}, \vec{n} + \vec{e_1}\right) = \lambda_1;$$

$$q\left(\vec{n}, \vec{n} + \vec{e_2}\right) = \lambda_2;$$

$$q\left(\vec{n}, \vec{n} - \vec{e_1}\right) = \frac{3}{4}\mu_1 I_{\{n_1 \ne 0\}};$$

$$q\left(\vec{n}, \vec{n} - \vec{e_2}\right) = \frac{1}{2}\mu_2 I_{\{n_2 \ne 0\}};$$

$$q\left(\vec{n}, \vec{n} + \vec{e_2} - \vec{e_1}\right) = \frac{1}{4}\mu_1 I_{\{n_1 \ne 0\}};$$

$$q\left(\vec{n}, \vec{n} + \vec{e_1} - \vec{e_2}\right) = \frac{1}{2}\mu_2 I_{\{n_2 \ne 0\}};$$

$q\left(\vec{n}, \vec{m}\right) = 0$, для $\vec{m}$ не имеющих такого вида.

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{3}{4}\mu_1 I_{\{n_1 \ne 0\}} + \frac{1}{2}\mu_2 I_{\{n_2 \ne 0\}} + \frac{1}{4}\mu_1 I_{\{n_1 \ne 0\}} + \frac{1}{2}\mu_2 I_{\{n_2 \ne 0\}} = q\left(\vec{n}\right).$$

Сложив все уравнения в системе, получим $q\left(\vec{n}\right)$, то есть цепь Маркова является консервативной.

Для проверки неприводимости построим цепочки из состояния $(0,0)$ в $(n_1, n_2)$ и обратно:

$$(0,0) \xrightarrow{\lambda_1} (1,0) \xrightarrow{\lambda_1} \ldots \xrightarrow{\lambda_1} (n_1, 0) \xrightarrow{\lambda_2} (n_1, 1) \xrightarrow{\lambda_2} \ldots \xrightarrow{\lambda_2} (n_1, n_2)$$

Значит, состояние $(n_1, n_2)$ достижимо из $(0,0)$. Аналогично

$$(n_1,n_2)\xrightarrow{\frac{3}{4}\mu_1}(n_1-1,n_2)\xrightarrow{\frac{3}{4}\mu_1}\ldots\xrightarrow{\frac{3}{4}\mu_1}(0,n_2)\xrightarrow{\frac{1}{2}\mu_2}(0,n_2-1)\xrightarrow{\frac{1}{2}\mu_2}\ldots\xrightarrow{\frac{1}{2}\mu_2}(0,0)$$

то есть состояние $(0,0)$ достижимо из $(n_1,n_2)$.

Так как все состояния достижимы из нулевого, то есть в любое состояние $(n_1,n_2)$ можно перейти из нулевого $(0,0)$ и наоборот, в нулевое можно перейти из любого состояния путем поступления, обслуживания и ухода заявок из сети, то отсюда следует неприводимость.

Докажем, что данная цепь Маркова имеет не нулевое решение, такое что

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\left|p(n_1;n_2)\right|<\infty;$$

Проверяем сходимость ряда для данной системы массового обслуживания. Подставим равенство загрузки $i$-го узла $p_i=\dfrac{\lambda\varepsilon_i}{\mu_i}$. Получаем

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}(1-p_1)p_1^{n_1}(1-p_2)p_2^{n_2}<\infty.$$

Ряд сходится если сходится каждый ряд в произведении

$$\left(\sum_{n_1=0}^{\infty}p_1^{n_1}\right)\left(\sum_{n_2=0}^{\infty}p_2^{n_2}\right)<\infty.$$

Ряды сходится как сумма членов геометрической прогрессии если: $\begin{cases}p_1<1;\\ p_2<1.\end{cases}$

Получены условия эргодичности. Выполнение данных условий достаточно для существования стационарного распределения.

## Литература


1 Малинковский, Ю. В. Теория массового обслуживания : учебное пособие по спецкурсу / Ю. В. Малинковский, А. Д. Буриков, М. А. Маталыцкий. – Гродно : Издательский центр ГрГУ, 1984. – 106 с.

2 Уолрэнд, Дж. Введение в теорию массового обслуживания / Дж. Уолрэнд. – Москва : Мир, 1993. – 336 с.



**УДК 004.522:004.62**



***В. А. Шкарубо***


# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕЧЕВОГО ИНТЕРФЕЙСА ДЛЯ ОПЕРАТИВНОГО СОХРАНЕНИЯ ЦИФРОВОЙ ИНФОРМАЦИИ


*В статье рассматриваются аспекты разработки приложения с речевым интерфейсом для управления цифровыми данными аудиопотока, включая распознавание речи,*