Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 4

УДК 517.948.34

МАТЕМАТИКА

А. Н. ФИЛАТОВ, Л. И. ТАЛИПОВА

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ УСРЕДНЕНИЯ В ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 17 XI 1969)

1. Рассмотрим систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \varepsilon X\left(t, x, \int_0^t \varphi(t, s, x(s))\, ds\right). \tag{1}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

В работах ([1], [2]) для уравнений вида (1) была предложена следующая процедура усреднения. Пусть

$$\psi(t, x) = \int_0^\infty \varphi(t, s, x)\, ds, \tag{2}$$

$$X_0(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x, \psi(t, x))\, dt. \tag{3}$$

Тогда системе (1) ставится в соответствие усредненная система вида

$$\dot{\xi} = \varepsilon X_0(\xi). \tag{4}$$

В настоящей заметке доказываются теоремы о близости решений систем (1) и (4) как на конечном, так и на бесконечном промежутке.

Теорема 1. *Пусть функции $X(t, x, y)$ и $\varphi(t, s, x)$ определены и непрерывны в области $Q\{t \geqslant 0,\ s \geqslant 0,\ x \in D,\ y \in E_n\}$ и пусть в этой области выполняются условия:*

1) $|X(t, x', y') - X(t, x'', y'')| \leqslant \lambda\{|x' - x''| + |y' + y''|\}$,
$$|\varphi(t, s, x') - \varphi(t, s, x'')| \leqslant \mu(t, s)\,|x' - x''|,$$
$$\int_0^t d\tau \int_0^\tau \mu(\tau, s)\, ds \leqslant At^\alpha, \quad A > 0, \quad 0 \leqslant \alpha < 1, \quad \lambda = \mathrm{const}.$$

2) *Функция $\psi(t, x)$, определяемая равенством (2), удовлетворяет условию Липшица*

$$|\psi(t, x') - \psi(t, x'')| \leqslant \nu|x' - x''|, \quad \nu = \mathrm{const}.$$

3) *В каждой точке x области D существует предел (3), а функция $X_0(x)$ ограничена ($|X_0| \leqslant M$) и удовлетворяет условию Липшица.*

4) *Решение $\xi = \xi(t)$, $\xi(0) = x(0) \in D$ усредненной системы определено для всех $t \geqslant 0$ и лежит в области D с некоторой ρ-окрестностью.*

5) *Вдоль траектории $\xi(t)$*

$$\int_0^t d\tau \left| \int_\tau^\infty \varphi(\tau, s, \xi(\tau))\, ds \right| \leqslant Bt^\beta, \quad B > 0, \quad 0 \leqslant \beta < 1.$$

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ можно указать такое ε_0, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ будет выполняться неравенство

$$|x(t) - \xi(t)| < \eta.$$

Доказательство. Как и в ([3]), показывается, что для любого $a > 0$ можно указать такое $\bar{\varepsilon}$, что при $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ будет выполняться неравенство

$$\varepsilon \left| \int_0^t \left[X\left(\tau, \xi(\tau), \int_0^\infty \varphi(\tau, s, \xi(\tau))\, ds\right) - X_0(\xi(\tau)) \right] d\tau \right| < a.$$

Следовательно,

$$|x - \xi| \leqslant a + \varepsilon\lambda \int_0^t |x(\tau) - \xi(\tau)|\, d\tau + \varepsilon\lambda \int_0^t d\tau \int_0^\tau \mu(\tau, s)\, |x(s) - \xi(s)|\, ds +$$

$$+ \varepsilon\lambda \int_0^t d\tau \left| \int_\tau^\infty \varphi(\tau, s, \xi(\tau))\, ds \right| + \varepsilon\lambda \int_0^t d\tau \int_0^\tau \mu(\tau, s)\, |\xi(s) - \xi(\tau)|\, ds.$$

Отсюда, учитывая условия теоремы, находим на отрезке $0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$:

$$|x - \xi| \leqslant (\alpha + \lambda M A L^{1+\alpha}\varepsilon^{1-\alpha} + \lambda B L^{1+\beta}\varepsilon^{1-\beta})\, e^{\lambda L + A L^\alpha \varepsilon^{1-\alpha}}.$$

Из последнего неравенства и следует утверждение теоремы.

Замечание 1. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = \varepsilon X(t, x) + \varepsilon \int_0^t Y(t, s, x(s))\, ds. \qquad (*)$$

Если функции X и Y ограничены, то решение $x(t)$ системы (*) существенно изменится уже на отрезке порядка $\varepsilon^{-1/2}$. Поэтому, в частности, для систем вида (*) можно сформулировать теорему об усреднении, аналогичную теореме 1, устанавливающую близость решений исходной и усредненной систем на отрезке $0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1/2}$. При этом параметры α и β будут меняться в пределах $0 \leqslant \alpha < 2$, $0 \leqslant \beta < 2$.

Теорема 2. *Заменим условие (3) теоремы 1 на следующие:*

а) *в каждой точке x области D равномерно относительно t существует предел*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X(t, x, \psi(t, x))\, dt = X_0(x), \qquad (5)$$

а функция $X_0(x)$ ограничена и удовлетворяет условию Липшица;

б) *решение $\xi = \xi(\tau)$, $\tau = \varepsilon t$ усредненной системы*

$$\dot{\xi} = \varepsilon X_0(\xi), \quad \xi(0) = x(0)$$

равномерно асимптотически устойчиво;*

в) *уравнение (1) не имеет особенных точек.*

Тогда для любого $0 < \eta < \rho$ можно указать такое ε_0, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ при всех $t > 0$ будет выполняться неравенство

$$|x(t) - \xi(t)| < \eta.$$

Доказательство. Доказательство проводится методами, изложенными в ([4], [6]).

---

* Относительно понятия равномерной асимптотической устойчивости см., например, ([5]).

Замечание 2. Отметим, что во многих случаях требование равномерной асимптотической устойчивости, фигурирующее в теореме 2, может быть ослаблено.

2. Рассмотрим систему более общего вида

$$\dot{x} = \varepsilon X\left(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}, \int_0^t \varphi(t, s, x(s), \dot{x}(s), y(s), \dot{y}(s))\, ds\right),$$

$$\dot{y} = Y_0(t, x, y) + \varepsilon Y_1\left(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}, \int_0^t \psi(t, s, x(s), \dot{x}(s), y(s), \dot{y}(s))\, ds\right). \quad (6)$$

Если известно общее решение системы (6) при $\varepsilon = 0$, то, как показано в ([4]), эту систему можно привести к стандартному виду. После этого к полученной системе можно применить рассматриваемую процедуру усреднения.

3. Пусть задана система нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра

$$u(t) = \varepsilon \int_0^t \Phi(t, s, u(s))\, ds. \quad (7)$$

Дифференцируя (7), находим

$$\dot{u} = \varepsilon \Phi(t, t, u) + \varepsilon \int_0^t \frac{\partial \Phi(t, s, u(s))}{\partial t} ds. \quad (8)$$

Система (8) является интегро-дифференциальной, и к ней применимы теоремы об усреднении 1 и 2.

Институт кибернетики с вычислительным центром
Академии наук УзССР
Ташкент

Поступило
13 XI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Филатов, Л. И. Талипова, Дифференциальн. уравн., 5, № 5 (1969). [2] А. Н. Филатов, Л. И. Талипова, Изв. АН УзССР, сер. техн. наук, № 2 (1969). [3] Г. С. Ларионов, А. Н. Филатов, Там же. [4] А. А. Ильюшин, Г. С. Ларионов, А. Н. Филатов, ДАН, 188, № 1 (1969). [5] Н. Н. Красовский, Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., 1959. [6] C. Banfi, Boll. Unione mat. ital., 22 (1967).