Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 3

УДК 519.21

МАТЕМАТИКА

В. В. АНИСИМОВ

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПОЛУМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ СО СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ СОСТОЯНИЙ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 12 I 1970)

Пусть при каждом $t \in (0, \infty)$ $\varkappa_t(s) \in \{1, 2, \ldots\}$ — непрерывный справа полумарковский процесс (п.м.п.), который задается, следуя [1, 2], матрицей переходных вероятностей

$$F_t(i, j, u) = P\{\varepsilon_{k+1} = j, \tau_t(\varepsilon_k) < u \mid \varepsilon_k = i\}, \quad i, j = 1, 2, \ldots,$$

где $\varepsilon_k = \varkappa_t(\theta_t(k))$, $\tau_t(\varepsilon_k) = \theta_t(k+1) - \theta_t(k)$, $\theta_t(k)$ — момент k-го скачка, т. е. $\theta_t(0) = 0$, а $\theta_t(k) = \min\{s\colon s > \theta_t(k-1), \varkappa_t(s) \neq \varepsilon_{k-1}\}$, $\quad k \geqslant 1$.

Введем следующие случайные величины:

$$\beta_t(i, k) = \min\{n\colon n > \beta_t(i, k-1), \varepsilon_n = i\}, \quad k \geqslant 1$$
$$(\beta_t(i, 0) = 0),$$

а ν_t, $\nu_t(i)$, $\Omega_t(i)$, $i = 1, 2, \ldots$,— соответственно полное число скачков п.м.п., количество попаданий в состояние i и полное время пребывания в i за время t.

Пусть при каждом $t \in (0, \infty)$

$$f_t^{(k)}(i, x), \quad x \in (0, \infty), \quad i = 1, 2, \ldots, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

семейство независимых в совокупности случайных величин, не зависимое от п.м.п. $\varkappa_t(s)$ (здесь и в дальнейшем величины $\gamma^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, обозначают независимые и одинаково распределенные с γ случайные величины). Введем аддитивный функционал $S(t)$ вида

$$S(t) = \sum_{k=0}^{\nu_t - 1} f_t(\varepsilon_k),$$

где $f_t(\varepsilon_k) = f_t^{(k)}(\varepsilon_k, \tau_t(\varepsilon_k))$, $\quad k = 0, 1, 2, \ldots$

В дальнейшем будем предполагать, что вложенной цепи Маркова, которая, как известно, задается матрицей $P(t) = \|p_t(i, j)\|$, $i, j = 1, 2, \ldots$, где $p_t(i, j) = F_t(i, j, \infty)$, $i, j = 1, 2, \ldots$, соответствует один положительный класс со стационарным распределением $q_t(i)$, $i = 1, 2, \ldots$, и

$$M\tau_t(i) = m_t(i) < \infty, \; i = 1, 2, \ldots,$$

$$A_t = \sum_{i=1}^{\infty} q_t(i)\, m_t(i) < \infty,$$

а матрице $\bar{P} = \lim\limits_{t\to\infty} P(t)$ также соответствует цепь с одним положительным классом.

Положим

$$a_t = A_t^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} q_t(i)\, m_t(f_i),$$

если $Mf_t(i, \tau_t(i)) = m_t(f_i) < \infty$, $i = 1, 2, \ldots$, и данный ряд абсолютно сходится, и $a_t = 0$ в противном случае. Обозначим

$$X_t(k) = \sum_{i=\beta_t(1,k)}^{\beta_t(1,k+1)-1} \tau_t(\varepsilon_i), \quad \varphi_t(k) = \sum_{i=\beta_t(1,k)}^{\beta_t(1,k+1)-1} f_t(\varepsilon_i),$$

$$Y_t(k) = \varphi_t(k) - a_t X_t(k), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Теорема 1. *Если существуют* $\gamma(t)$ *и* $b(t)$ *такие, что*

$$P\left\{\frac{1}{\gamma(t)} \sum_{k=1}^{V_t(1)} \left(X_t(k) - \frac{A_t}{q_t(1)}\right) < z\right\} \to F(z), \text{*} \tag{1}$$

$$P\left\{\frac{1}{b(t)} \sum_{k=1}^{V_t(1)} Y_t(k) < z\right\} \to \Phi(z), \tag{2}$$

$$\gamma(t)\,/\,t \to 0, \quad A_t / \gamma(t)\, q_t(1) \to 0, \tag{3}$$

и для любого $\varepsilon > 0$, $i = 1, 2, \ldots$

$$P\{f_t(i, \tau_t(i)) > \varepsilon b(t)\} \to 0,$$

$$P\{a_t\tau_t(i) > \varepsilon b(t)\} \to 0$$

при $t \to \infty$, *а* $F(z)$ *— собственный закон распределения, то, независимо от начального состояния п.м.п.,*

$$P\left\{\frac{1}{b(t)}(S(t) - ta_t) < z\right\} \to \Phi(z).$$

Следствие. *Если* $a_t \neq 0$ *и для любого* $k = 1, 2, \ldots$ *при* $\alpha_t = o(1)$

$$M \exp\{i\lambda\alpha_t(m_t(f_k))^{-1} f_t(k, \tau_t(k))\} = 1 + \alpha_t i\lambda(1 + o_k(1)),$$

то в предположениях (1) *и* (3) *величина* $(ta_t)^{-1}S(t)$ *при* $t \to \infty$ *стремится по вероятности к единице, т. е. для* $S(t)$ *справедлив закон больших чисел.*

Заметим еще, что в предположениях (1) и (3)

$$P\left\{\frac{A_t}{\gamma(t)\, q_t(1)} \left(\nu_t(1) - \frac{t q_t(1)}{A_t}\right) < z\right\} \to 1 - F(-z).$$

Значение теоремы 1 в том, что она позволяет свести изучение аддитивных сумм от п.м.п. типа $S(t)$ к изучению сумм неслучайного числа независимых одинаково распределенных слагаемых.

Применим полученные результаты к исследованию вектора чисел попаданий и времен пребывания в состояниях некоторого конечного подмножества $I = \{1, 2, \ldots, r\}$ состояний п.м.п. Для этого положим

$$f_t(i, x) = \varphi_i + f_i x, \ i = 1, \ldots, r, \quad f_t(i, x) = 0, \ i > r,$$

где φ_i, f_i, $i = 1, \ldots, r$ — произвольные действительные числа.

Обозначим $\theta_t^*(0) = 0$, а

$$\theta_t^*(k) = \min\{\theta_t(l)\colon \theta_t(l) > \theta_t^*(k-1), \varepsilon_l \in I\}, \quad k \geqslant 1.$$

Положим $\tau_t^*(\varepsilon_k^*) = \theta_t^*(k+1) - \theta_t^*(k)$, где $\varepsilon_k^* = \varkappa_t(\theta_t^*(k))$. Ясно, что

$$\tau_t^*(i) = \tau_t(i) + \bar{\tau}_t(i), \quad i \in I,$$

где

$$\bar{\tau}_t(i) = \min\{s\colon \varkappa_t(s) \in I \,|\, \varkappa_t(0 - o) = i, \varkappa_t(0) \neq i\}.$$

---

* Здесь обозначение $V_t(j)$ — целая часть $\dfrac{t}{A_t} q_t(j)$, $j = 1, 2, \ldots$

Предположим, что для каждого $j \in I$ существуют $b_t(j)$ и $B_t(j)$ такие, что совместное распределение

$$\left(\frac{1}{b_t(j)} \sum_{k=1}^{\nu_t(j)} (\tau_t^{(k)}(j) - m_t(j)), \frac{1}{B_t(j)} \sum_{k=1}^{\nu_t(j)} (\tilde{\tau}_t^{(k)}(j) - \tilde{m}_t(j))\right) \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} (\xi_j, \tilde{\xi}_j)\,^*, \quad (4)$$

$$D_t / t \to 0, \quad A_t / D_t \to 0,$$

где

$$D_t = \max\{\sqrt{tA_t}, b_t(j), B_t(j), j \in I\},$$

$$m_t = \max\{m_t(j), j \in I\}, \quad \tilde{m}_t(j) = M\tilde{\tau}(j).$$

Пусть

$$\psi_j(\lambda_1, \lambda_2) = M \exp\{i(\lambda_1 \xi_j + \lambda_2 \tilde{\xi}_j)\}.$$

Теорема 2. *Если выполнено условие* (4) *и* $tm_t(A_t b_t)^{-1} \to 0$, *то совместное распределение случайного вектора*

$$\left\{\frac{m_t}{B_t}\left(\nu_t(1) - \frac{tq_t(1)}{A_t}\right), \sqrt{\frac{A_t}{t}}\left(\nu_t(1) - \frac{q_t(1)}{q_t(i)}\nu_t(i)\right),\right.$$
$$\left. i = 2, \ldots, r, \; g_t(k)\left(\Omega_t(k) - \frac{tq_t(k)\, m_t(k)}{A_t}\right), \; k = 1, \ldots, r\right\},$$

независимо от начального состояния, слабо сходится к распределению с характеристической функцией вида

$$\exp\left\{-\frac{\sigma^2(\varphi_2, \ldots, \varphi_r)}{2}\right\} \prod_{j=1}^{r} \psi_j(\rho_j f_j - \tilde{\rho}_j a(f), \alpha_j a(f)),$$

где параметры $\varphi_i(f_i)$, $i = 1, \ldots, r$ соответствуют первым (*последним*) r *компонентам вектора,* $\sigma^2(\varphi_2, \ldots, \varphi_r)$ — *невырожденная квадратичная форма переменных* φ_i, $i = 2, \ldots, r$. *Здесь*

$$B_t = \max\left\{b_t(i), \frac{m_t}{A_t} B_t(i), i = 1, \ldots, r\right\}, \quad a(f) = \varphi_1 + \sum_{i=1}^{r} c_i f_i,$$

$g_t(k)$, $k = 1, \ldots, r$ — *нормирующие множители, а* ρ_j, $\tilde{\rho}_j$, α_j, c_j, $j = 1, \ldots, r$ — *некоторые константы.*

Полученные результаты, в частности, применительно к счетным цепям Маркова, имеющим эргодическое распределение, согласуются с результатами В. А. Волконского ([3]), а для п.м.п., у которого

$$F_t(i, j, u) = p(i, j) F(i, u), \quad i, j = 1, 2, \ldots,$$

при наших предположениях позволяют получить соответствующие результаты Х. Кестена ([4]).

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
1 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Levy, Proc. Ind. Congress Math., 3, 416 (1954). [2] R. Pyke, Ann. Math. Stat., 32, № 4 (1961). [3] В. А. Волконский, Теория вероятностей и ее применения, 2, в. 2, 231 (1957). [4] H. Kesten, Trans. Am. Math. Soc., 103, № 1 (1962).

* В смысле слабой сходимости функций распределения.