Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 3

УДК 517.948.32:539.3 *МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА*

В. А. БАБЕШКО

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 19 I 1970)

Решение смешанных задач теории упругости ([1], [2]) и математической физики для слоя с круговой линией смены граничных условий можно свести к исследованию интегрального уравнения

$$K_s q \equiv \int_0^a k_s(r, \rho)\, q(\rho)\, \rho\, d\rho = f(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant a, \tag{1}$$

с ядром

$$k_s(r, \rho) = \int_0^\infty uK(u)\, J_s(ur)\, J_s(u\rho)\, du; \tag{2}$$

$J_s(z)$ — функция Бесселя целого индекса s.

К уравнению (1) приводятся также и некоторые парные интегральные уравнения ([3]).

Задача о гидродинамическом ударе, рассмотренная в ([4]), эквивалентна уравнению

$$\Delta K_0 q = f(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant a.$$

Δ — осесимметричный оператор Лапласа.

Уравнение (1) является пространственным аналогом уравнения свертки на конечном отрезке ([5]). Если некоторая плоская смешанная задача математической функции порождает уравнение свертки на отрезке, то эта же смешанная задача в пространственной постановке с условием стены граничных условий на окружности радиуса a приводит к уравнению (1).

В работах ([1-3]) предложен метод асимптотического исследования уравнения (1) при $a \to 0$. В этих же работах дается разложение решения по параметру a. В ([3]) предложен другой метод решения этого уравнения, основанный на изучении парных интегральных уравнений. Однако оба метода оказываются неэффективными, если $a \to \infty$. В работе ([6]) предложен метод построения нулевого члена асимптотики уравнения (1) при $a \to \infty$. В работе автора ([5]) в предположении мероморфности функции $K(u)$ строится регулярное представление решения указанного уравнения при больших a.

В настоящей заметке приводится теорема, дающая ответ на ряд общих вопросов относительно свойств решения уравнения (1) при больших a. Дается аналитический вид решения и указывается область его существования и единственности.

1. Обозначим через E множество гладких контуров Γ — границ всевозможных выпуклых окрестностей $V(\Gamma)$ точки $-i\infty$, полностью лежащих в нижней полуплоскости и не имеющих с вещественной осью общих точек. Через $\mu(\Gamma)$ обозначим расстояние от $V(\Gamma)$ до вещественной оси. Будем обозначать $\Gamma_2 > \Gamma_1$, если $V(\Gamma_2) \supset V(\Gamma_1)$ и расстояние между контурами Γ_2 и Γ_1 ограничено снизу фиксированным числом. Нетрудно видеть, что по $\Gamma_1 \in E$ легко можно построить и притом неоднозначно контур $\Gamma_2 \in E$

и такой, что $\Gamma_2 > \Gamma_1$. Контур Γ_2 можно построить, деформировав, например, Γ_1 таким образом, чтобы точки его сместились по внешней нормали на величину, не достигающую расстояния Γ_1 до вещественной оси.

Пусть найдется контур $\Gamma_1 \in E$ с уравнением $z = x + iy(x)$ $(y(x) < -\mu(\Gamma_1),\ |y(x)| = O(x^\varepsilon),\ x \to \infty\ \varepsilon \geqslant 1)$ такой, что функция $K(z)$ регулярна в области Ω: $|\operatorname{Im} z| \leqslant -y(x)$, $|x| \leqslant \infty$, и непрерывна на Γ_1.

Кроме того, будем предполагать, что $K(z)$ — четная, вещественная на вещественной оси функция, обладающая асимптотическим поведением

$$K(z) = c^2 z^{-2\gamma}[1 + O(z^{-\alpha})], \quad z \in \Omega + \Gamma_1, \quad |z| \to \infty, \qquad 0 < \gamma < 1, \quad \alpha > 0. \tag{3}$$

В этом случае для $K(z)$ имеет место представление

$$K(z) = K_-(z) K_+(z). \tag{4}$$

$K_-(z)$ регулярна в области $\Omega \cup \operatorname{Im} z < 0$, $K_+(z)$ соответственно в $\Omega \cup \operatorname{Im} z > 0$ и, кроме того, справедлива оценка

$$K_+(z), \quad K_-(z) \sim cz^{-\gamma}, \quad z \in \Omega, \quad |z| \to \infty. \tag{5}$$

Обозначим через A множество функций $\varphi(z)$, регулярных в области $S = \Omega \cap \operatorname{Im} z \leqslant -\delta$ ($\delta > 0$ — сколь угодно малое фиксированное число) и допускающих представление ([5])

$$\varphi(z) = \psi(z) z^{-1}, \quad \max_{z \in S} |\psi(z)| < \infty, \quad 0 < \delta < \mu(\Gamma_1).$$

Если в A ввести норму соотношением

$$\|\varphi\|_A = \max_{z \in S} |\psi(z)|, \tag{6}$$

то A превращается в банахово пространство.

На элементах из A определим оператор

$$F(a, z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma_2} \int\limits_{\Gamma_1} \frac{p(t_2, t_1)\, \varphi(t_1)\, dt_1 dt_2}{z - t_2}, \quad z \in \Gamma_3; \tag{7}$$

$$p(t_2, t_1) = K_+(t_2)\,[R_1(t_1) + R_2(t_2)]/(t_2^2 - t_1^2)\, K_+(t_1),$$
$$\Gamma_3 > \Gamma_2 > \Gamma_1, \quad \Gamma_k \in E, \quad k = 1, 2, 3,$$
$$R_1(t) = t I_{s+1}(ita)\, I_s^{-1}(ita) - t, \quad R_2(t) = t K_{s+1}(ita)\, K_s^{-1}(ita) - t; \tag{8}$$

$I_s(t)$, $K_s(t)$ — модифицированные функции Бесселя порядка s.

Нетрудно установить, что оператор $F(a, z)$ действует в A непрерывно. Норма оператора A, действующего с контура Γ_1 на контур $\Gamma_3 > \Gamma_2 > \Gamma_1$, оценивается неравенством

$$\|F\|_{\Gamma_1 \to \Gamma_3} \leqslant \max_{z \in \Gamma_3} \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\Gamma_2} \int\limits_{\Gamma_1} \left| \frac{zp(t_2, t_1)}{(z - t_2)\, t_1} \right| |dt_1 dt_2|. \tag{9}$$

Этот же оператор, действующий в A с контура Γ_3 на Γ_1, представим в форме

$$F(a, z)\varphi = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma_4} \int\limits_{\Gamma_3} \frac{p(t_4, t_3)\, \varphi(t_3)\, dt_3 dt_4}{z - t_4} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_3} p(z, t_3)\, \varphi(t_3)\, dt_3 + {}$$
$$+ \varphi(z) \frac{R_1(z) + R_2(z)}{2z}, \quad z \in \Gamma_1, \quad \Gamma_3 < \Gamma_4 \in E, \tag{10}$$

причем

$$\|F\|_{\Gamma_3 \to \Gamma_1} \leqslant \max_{z \in \Gamma_1} \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\Gamma_4} \int\limits_{\Gamma_3} \left| \frac{zp(t_4, t_3)}{(z - t_4)\, t_3} \right| |dt_3 dt_4| + {} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_3} \left| \frac{zp(z, t_3)}{t_3} \right| |dt_3| + \left| \frac{R_1(z) + R_2(z)}{2z} \right| \right\}. \tag{11}$$

Подынтегральные функции в соотношениях (7), (10), очевидно, аналитичны в S, поэтому контуры интегрирования можно деформировать; при этом форма оператора не изменится, если контур не пересечет особенность подынтегральной функции. Пополним E кусочно-гладкими Γ. Интегрирование в (7), (10) необходимо производить в порядке следования дифференциалов, т. е. вначале вычислять внутренний интеграл, затем внешний.

Теорема. *Единственное в $L_p(0, a)$ $(p > 1)$ решение интегрального уравнения* (1) *с правой частью $f(r) \in c_2^\lambda(0, a)$ $(\lambda \geqslant \gamma)$ для значений $a > a_0$ дается соотношением*

$$q(r) = \int_0^\infty \frac{\Phi(\eta)\,\eta J_s(\eta r)\,d\eta}{K(\eta)} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n S(r) F^n D; \tag{12}$$

a_0 есть наибольший корень уравнения

$$1 = \inf_{\gamma_k \in E} \|F\|_{\gamma_3 \to \gamma_4} \|F\|_{\gamma_1 \to \gamma_2}. \tag{13}$$

Здесь infimum берется по всевозможным контурам $\gamma_k \in E$ таким, что $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \gamma_4$. При этом справедливо соотношение

$$q(r)(a-r)^\gamma \in c(0, a), \tag{14}$$

и для частной суммы

$$q_m(r) = \int_0^\infty \frac{\Phi(\eta)\,\eta J_s(\eta r)\,d\eta}{K(\eta)} + \sum_{n=0}^{m} (-1)^n S(r) F^n D \tag{15}$$

имеет место асимптотическая оценка

$$[q(r) - q_m(r)](a-r)^\gamma = O[a^{-2(m+1)}], \quad a \to \infty. \tag{16}$$

Здесь введены обозначения

$$S(r) f = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - i\varepsilon_1}^{\infty - i\varepsilon_1} \frac{I_s(itr) f(t)\,dt}{I_s(ita) K_+(t)}, \quad 0 < \varepsilon_1 < \mu(\Gamma_1),$$

$$\psi(\tau) = \int_0^\infty \left[\frac{\tau K_{s+1}(i\tau a) J_s(\eta a)}{K_s(i\tau a)} + i\eta J_{s+1}(\eta a)\right] \frac{\eta\Phi(\eta)\,d\eta}{(\eta^2 - \tau^2) K(\eta)}, \quad \operatorname{Im}\tau < 0, \tag{17}$$

$$D(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{K_+(\tau)\psi(\tau)\,d\tau}{t - \tau}, \quad \Gamma_1 \leqslant \Gamma \in E, \quad t \in \Gamma_2^1 > \Gamma,$$

$$f(r) = \int_0^\infty \eta\Phi(\eta) J_s(\eta r)\,d\eta,$$

$F^n(a, z)$ — итерация оператора $F(a, z)$ порядка n; $c_2^\lambda(0, a)$ — множество функций, вторая производная от которых удовлетворяет условию Гёльдера с показателем λ на $[0, a]$; $c(0, a)$ — множество непрерывных на $[0, a]$ функций.

2. В качестве примера рассмотрим уравнение (1) при $s = 0$ для случая ([6]), когда

$$K(z) = (z^2 + b^2)^{-0,5}, \quad K_+(z) = (b - iz)^{-0,5}, \quad K_-(z) = (b + iz)^{-0,5},$$

а разрез соединяет бесконечно удаленную точку вдоль мнимой оси с точками $\pm ib$, $-ib$, ib для каждой функции соответственно. Ветви функций подобраны из условия

$$K_+(z) \to z^{-0,5} \exp(i\pi/4), \quad K_-(z) \to z^{-0,5} \exp(-i\pi/4), \quad z \to \infty.$$

Вычислим a_0. В качестве контуров γ_k примем контуры, описываемые уравнениями

$$\gamma_k = x - i(|x| + B_k), \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad b > B_1 > B_2 > B_3 > B_4 > 0.$$

При $B_4 \geqslant 1$ получим существенно упрощенную, а потому и завышенную оценку вида

$$\| F \|_{\Gamma_2 \to \Gamma_1} \| F \|_{\Gamma_1 \to \Gamma_2} < Q(B_1, B_2, B_3, b) [Q(B_3, B_4, B_1, b) + \\ + 108 / \pi (B_1 - B_2) \sqrt{B_1 B_3} + 14 B_3^{-2}] a^{-4}.$$

Здесь

$$Q(B_1, B_2, B_3, b) = \frac{18}{\pi^2} \left[\frac{2\pi}{\sqrt{B_1}} + \frac{3\sqrt{B_1 + b}}{B_2} \ln(B_1 + B_2) \right] \times \\ \times \left[\frac{2}{B_1 - B_2} + \pi (B_2 - B_3 + B_1^{-0,5}) \right].$$

При $b = 5$, полагая $B_k = 5 - k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ и производя вычисления, получим $a_0 < 11{,}3$. Таким образом, ряд (12) в данном случае представляет решение уравнения (1) в интервале

$$11{,}3 \leqslant a < \infty.$$

Ростовский государственный
университет

Поступило
7 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. М. Александров, И. И. Ворович, ПММ, 24, в. 2 (1960). [2] И. И. Ворович, Ю. А. Устинов, ПММ, 23, в. 3 (1959). [3] Н. Н. Лебедев, Я. С. Уфлянд, ПММ, 22, в. 3 (1958). [4] И. И. Ворович, В. И. Юдович, ПММ, 21, в. 4 (1957). [5] В. А. Бабешко, ДАН, 186, № 6 (1969). [6] В. М. Александров, В. А. Бабешко, В. А. Кучеров, ПММ, 30, в. 1 (1966). [7] В. А. Бабешко, ПММ, 31, в. 1 (1967).