Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 3

УДК 513.831 МАТЕМАТИКА

В. К. БЕЛЬНОВ

ОБ УПЛОТНЕНИЯХ НА КОМПАКТЫ

(Представлено академиком П. С. Александровым 12 I 1970)

Следующее определение известно (1).

Определение 1. Пусть X — топологическое пространство. Точка $x \in X$ называется точкой некомпактности пространства X, если в точке x не существует ни одной базы, состоящей из открытых множеств с бикомпактными замыканиями.

Множество N всех точек некомпактности пространства X, очевидно, замкнуто в X.

Теорема 1. *Метрическое пространство со счетной базой тогда и только тогда уплотняется на полное метрическое пространство, когда множество всех его точек некомпактности уплотняется на некоторое полное метрическое пространство.*

К сожалению, аналогичная теорема об уплотнениях на компакты неверна.

Пример 1. Пространство X является подмножеством плоскости R^2: $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [0, 1] \times (\frac{1}{n}) \cup (0, 0) \cup (1, 0)$. Как известно (1), пространство X не уплотняется ни на один компакт, и это несмотря на то, что множество всех точек некомпактности N пространства X является компактом: $N = \{(0, 0); (1, 0)\}$.

Пример 2. Пространство Y является подмножеством пространства R^3: $Y = ([0, 1] \times [0, 1] \times (0, 1]) \cup X$, где X — пространство, построенное выше. Множество всех точек некомпактности пространства Y в точности совпадает с X, и, следовательно, не уплотняется ни на один компакт. Тем не менее, можно показать, что пространство Y уплотняется на некоторый компакт Z. (Доказательство этого факта почти повторяет доказательство теоремы об «окуренном» полиэдре (1).)

Теорема 2. *Пусть X — хаусдорфово пространство и $A, B \subseteq X$ — такие замкнутые подмножества пространства X, что:*

1) *A и B уплотняются на бикомпакты;*
2) *$X = A \cup B$;*
3) *$K = A \cap B$ — бикомпакт.*

Тогда пространство X уплотняется на бикомпакт.

Доказательство. Пусть $f_1: A \to A'$ и $f_2: B \to B'$ — уплотнения пространств A и B на бикомпакты A' и B' соответственно. Построим бикомпакт X', на который уплотняется пространство X. Носитель пространства X' совпадает с множеством X. Топология пространства X' устроена следующим образом: если точка $x \in A \setminus K \subseteq X'$, базу в точке x образуют все множества вида $f_1^{-1}(V)$, где V — открытое множество в $A' \setminus f(K)$, содержащее точку $f_1(x)$. Аналогично определяется база в точках $x \in B \setminus K \subseteq X'$. Пусть точка $x \in K \subset X'$. Базу в точке x образуют все множества вида $f_1^{-1}(U) \cup f_2^{-1}(V)$, где U и V — такие окрестности точки x в пространствах A' и B' соответственно, что $f_1^{-1}(U) \cap K = f_2^{-1}(V) \cap K$. Нетрудно проверить, что пространство X' хаусдорфово, и пространства A' и B' можно отождествить с подпространствами A и B пространства X'. Отсюда следует, что X' — бикомпакт. Ясно, что пространство X уплотняется на пространство X'. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть X — такое вполне регулярное пространство, что: 1) множество N всех точек некомпактности пространства X конечно — $N = \{x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 2) Для каждой точки $x_i \in N$ существует такая окрестность Ox_i с бикомпактной границей, что $Ox_i \cap Ox_j = \phi$ для любых точек $x_i, x_j \in N$, $i \neq j$. Тогда пространство X уплотняется на бикомпакт.*

Доказательство. Из условий теоремы вытекает существование таких окрестностей Γ_i точек $x_i \in N$, $i = 1, 2, \ldots, n$, что $x_i \in \Gamma_i \subset [\Gamma_i]_X \subseteq Ox_i$ и множество Γ_i имеет бикомпактную границу для всех i. Рассмотрим βX — максимальное бикомпактное расширение пространства X. Как известно ([2]), βX — совершенное расширение пространства X, поэтому $\mathrm{Fr}_{\beta X} O\langle \Gamma_i \rangle = [\mathrm{Fr}_X \Gamma_i]_{\beta X} = \mathrm{Fr}_X \Gamma_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где $O\langle\ \rangle$ — оператор максимального высечения в βX. Пусть $A_i = [\Gamma_i]_{\beta X} \setminus (X \setminus N)$. Это, очевидно, замкнутые подмножества βX, и для них имеем $A_i \cap X = x_i$ и $A_i \cap A_j \subseteq \mathrm{Fr}_{\beta X} O\langle \Gamma_i \rangle \cap \mathrm{Fr}_{\beta X} O\langle \Gamma_j \rangle \subseteq [\Gamma_i]_X \cap [\Gamma_j]_X = \phi$, если $i = j$. Положим $A_0 = (\beta X \setminus X) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Покажем, что A_0 замкнуто в βX. Действительно, так как $[\beta X \setminus X]_{\beta X} \cap X = N$, то $[A_0]_{\beta X} \cap X = \phi$. Далее, легко видеть, что $[A_0]_{\beta X} \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \subseteq [A_0]_{\beta X} \cap (\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Fr}_{\beta X} O\langle \Gamma_i \rangle) \subseteq [A_0]_{\beta X} \cap X = \phi$. Возьмем произвольно точку $y \in X$, $y \notin N$ и рассмотрим непрерывное разбиение пространства βX, элементами которого являются: точки множества $X \setminus (N \cup y)$, бикомпакты A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, и бикомпакт $A_0 \cup y$. Пространством этого непрерывного разбиения является некоторый бикомпакт Y и сужение естественного отображения $f\colon \beta X \to Y$ на пространство X есть уплотнение этого пространства на бикомпакт Y: $f|_X\colon X \to Y$. Теорема доказана.

В дальнейшем понадобится следующая лемма:

Лемма 1. *Пусть X — метрическое пространство со счетной базой такое, что: 1) X является абсолютным F_σ и 2) $\dim X = 0$, и пусть ρ — некоторая метрика пространства X. Тогда X можно представить в виде $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, где K_i — попарно не пересекающиеся компакты и $\operatorname{diam} K_i \underset{i\to\infty}{\to} 0$, где $\operatorname{diam} K_i$ рассматривается в метрике ρ.*

Из леммы 2 легко вытекает следующая

Теорема 4. *Пусть X — метрическое пространство со счетной базой. Для того чтобы пространство X имело компактное расширение со счетным наростом, необходимо и достаточно, чтобы X было π-компактно и являлось абсолютным G_δ.*

Следствие ([3]). *Любое π-компактное метрическое пространство со счетной базой, являющееся абсолютным G_δ, уплотняется на компакт.*

Определение 2. Метрическое пространство X со счетной базой называется слабо π-компактным, если существует такая система открытых в пространстве X множеств $\{U_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, с компактными границами, что для любых точек $x, y \in X$, $x \neq y$, можно найти открытые множества $U, V \in \{U_i\}$, для которых $x \in U$, $y \in V$ и $U \cap V = \phi$.

Теорема 5. *Пусть X — слабо π-компактное пространство. Тогда пространство X уплотняется на некоторое π-компактное пространство Y, которое метризуемо и имеет счетную базу.*

Доказательство. Так как пространство X слабо π-компактно, существует такая система $\mathcal{U}$ открытых подмножеств X: $\mathcal{U} = \{U_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, с компактными границами, что для любых точек $x, y \in X$, $x \neq y$ можно найти такие $U, V \in \mathcal{U}$, для которых $x \in U$, $y \in V$ и $U \cap V = \phi$. Некоторая система подмножеств $\mathfrak{A} = \{A_\alpha\}$ пространства X называется алгебраически замкнутой, если она удовлетворяет следующим условиям: 1) если A_{α_0} и $A_{\alpha_1} \in \mathfrak{A}$, то и $A_{\alpha_0} \cap A_{\alpha_1} \in \mathfrak{A}$; 2) если $A_{\alpha_0} \in \mathfrak{A}$, то и $X \setminus [A_{\alpha_0}]_X \in \mathfrak{A}$. Используя индукцию, нетрудно доказать, что существует минимальная алгебраически замкнутая система $\overline{\mathcal{U}}$, содержащая систему $\mathcal{U}$ и обладающая следующими свойствами: а) $\overline{\mathcal{U}}$ состоит из счетного числа открытых множеств, $\overline{\mathcal{U}} = \{V_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$; б) любое $V_j \in \overline{\mathcal{U}}$ имеет компактную границу. Строим пространство Y. Носителем пространства Y является множество X, базу открытых множеств образуют элементы системы $\overline{\mathcal{U}}$. Ясно, что Y — хаусдорфово пространство со счетной базой. Покажем, что пространство Y π-компактно. Пусть точка $y \in Y$ и Oy — произвольная окрестность точки y. Существует такое открытое множество U пространства Y, $U \in \overline{\mathcal{U}}$, что $y \in U \subseteq Oy$. Так как множество $X \setminus [U]_X \in \overline{\mathcal{U}}$, то множество $[U]_X$ замкнуто в пространстве Y и $[U]_X = [U]_Y$, поэтому $\mathrm{Fr}_Y U = \mathrm{Fr}_X U$ и является компактом. Докажем регулярность, а следовательно, и метризуемость пространства Y. Пусть точка $y \in Y$ и Oy — произвольная окрестность точки y. Без ограничения общности можно считать, что $Oy \in \overline{\mathcal{U}}$. Если $[Oy]_Y = Oy$, то утверждение очевидно. В противном случае для любой точки $x \in \mathrm{Fr}_Y Oy$ в силу хаусдорфовости пространства Y существует такая окрестность Ox в пространстве Y, что $[Ox]_Y \not\ni y$. Множество всех таких окрестностей образует открытое покрытие компакта $\mathrm{Fr}_Y Oy$, поэтому существует такое конечное множество точек $x_i \in \mathrm{Fr}_Y Oy$, что $\mathrm{Fr}_Y Oy \subseteq \bigcup_i Ox_i$ и $[\bigcup_i Ox_i]_Y \not\ni y$. Пусть $U = Oy \cap (Y \setminus [\bigcup_i Ox_i]_Y)$. Нетрудно видеть, что $y \in U \subseteq [U]_Y \subseteq Oy$. Так как пространство X уплотняется на пространство Y, теорема доказана.

Определение 3. Пусть X — топологическое пространство и точка $x \in X$. Точка x называется точкой не π-компактности пространства X, если не существует базы точки x в пространстве X, состоящей из открытых множеств с бикомпактными границами. Если пространство X метрическое, множество M всех точек не π-компактности пространства X есть множество типа F_σ.

Теорема 6. *Пусть X — слабо π-компактное метрическое полное пространство со счетной базой, множество всех точек не π-компактности M которого есть компакт. Тогда пространство X уплотняется на некоторый компакт.*

Доказательство. Так как пространство X слабо π-компактно, существует такая система $\{U_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, открытых множеств с компактными границами, что для любых точек $x, y \in X$ можно найти $U, V \in \{U_i\}$, для которых $x \in U$, $y \in V$ и $U \cap V = \emptyset$. Множество M точек не π-компактности X есть компакт, поэтому множество $X \setminus M$ открыто в пространстве X и любая точка $x \in X \setminus M$ имеет в пространстве X базу, состоящую из открытых множеств с компактными границами. Следовательно, существует такая система $\{V_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$, открытых множеств пространства X с компактными границами, что для любой точки $x \in X \setminus M$ множество всех элементов этой системы, содержащих точку x, образует базу точки x в пространстве X. Пусть $\mathcal{U} = \{U_i\} \cup \{V_j\}$, $i, j = 1, 2, \ldots$ Строим как в доказательстве теоремы 5 π-компактное метрическое пространство Y, используя систему $\mathcal{U}$. Если $f\colon X \to Y$ — уплотнение, полученное при доказательстве предыдущей теоремы, то нетрудно проверить, что $f|_{X \setminus M}\colon X \setminus M \to f(X \setminus M) \subseteq Y$ является гомеоморфизмом. Так как $f|_M\colon M \to f(M)$ — тоже гомеоморфизм, то пространство Y, как объединение двух абсолютных G_δ — $f(X \setminus M)$ и $f(M)$, является абсолютным G_δ и по следствию из теоремы 4 уплотняется на некоторый компакт Z. Поэтому и пространство X уплотняется на компакт Z. Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема:

Теорема 7. *Пусть X — полное метрическое пространство со счетной базой, множество всех точек не π-компактности M которого есть дискретное и замкнутое подмножество X. Пусть $M = \{x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$ Предполо-*

жим, что существует такая дизъюнктная система $\{Ox_i\}$ открытых множеств с компактными границами, что $x_i \in Ox_i$, $i = 1, 2, \ldots$ Тогда пространство X уплотняется на некоторый компакт Z.

Следствие. *Пусть X — полное метрическое пространство со счетной базой. Если пространство X имеет лишь одну точку не π-компактности, то оно уплотняется на некоторый компакт.*

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
8 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. С. Пархоменко, Изв. АН СССР, сер. матем., 5, № 3, 225 (1941). [2] Е. Г. Скляренко, Там же, 26, № 3, 427 (1962). [3] И. Л. Раухваргер, ДАН, 66, № 1, 13 (1949).