Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 3

УДК 513.775 *МАТЕМАТИКА*

И. М. ДЕКТЯРЕВ

ОБЩАЯ ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ

(Представлено академиком П. С. Александровым 16 I 1970)

В последние годы появился ряд работ, посвященный доказательству того, что при определенных условиях, наложенных на аналитические отображения многообразий, почти все значения в некотором смысле одинаково распределены. При этом весьма существенные ограничения налагаются на многообразие-образ. Так, в работах ([1–3]) рассматриваются отображения в проективное пространство CP^n, в работе ([4]) — в однородное кэлерово многообразие. Наконец, в ([5–7]) рассматриваются отображения в произвольные кэлеровы многообразия.

В настоящей заметке мы получаем те же результаты без каких-либо ограничений на многообразие-образ.

В основе наших рассмотрений лежит следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть M — компактное комплексное n-мерное многообразие и ω — форма типа (n, n), задающая на M элемент объема, при этом $\int\limits_M \omega = 1$.*

Тогда на M можно задать такое семейство форм λ_a, зависящее от параметра $a \in M$, что:

1. *Форма λ_a определена и принадлежит классу C^∞ всюду за исключением точки a.*
2. *В окрестности точки a форма λ_a представима в виде $\varkappa\mu$, где μ — форма класса C^∞, а $\varkappa$ — функция, которая в подходящих локальных координатах имеет вид $|z|^{-2n+2}\log|z|$ (предполагается, что a является началом координат).*
3. *Формы λ_a являются положительными вещественными формами типа $(n-1, n-1)$, т. е. записанные в локальных координатах коэффициенты этих форм образуют положительно определенную эрмитову матрицу.*
4. *λ_a непрерывно зависит от a.*
5. *Вне точки a имеет место основное равенство*

$$dd^c\lambda_a = \omega.$$

Замечание. Для проективного пространства CP^n такая форма была построена Левиным ([2]). Для однородного кэлерова многообразия существование такой формы было установлено Хиршфельдером ([4]), а для произвольного кэлерова многообразия — Ву ([5]).

Доказательство этой теоремы опирается на следующую лемму.

Лемма. *На компактном комплексном n-мерном многообразии существует такая строго положительная форма μ типа $(n-1, n-1)$, что $dd^c\mu = 0$.*

Доказательство леммы. Пусть μ_0 — произвольная строго положительная форма типа $(n-1, n-1)$, а ω — произвольная строго положительная форма типа (n, n). Тогда для любой функции f на M однозначно определена такая функция φ, что $dd^c(f\mu_0) = \varphi\omega$. Соответствие $f \to \varphi$, очевидно, определяет на M эллиптический оператор A. Сопряженный оператор A^*, как легко видеть, определяется соответствием $f \to \varphi$, где φ — такая функция, что $dd^c f \wedge \mu = \varphi\omega$.

Из вида оператора A^* и общей теории эллиптических уравнений следует, что уравнение $A^* f = q$ не имеет решений, если функция q неотрицательна и не есть тождественный нуль. Отсюда легко получить, что уравнение $Af = 0$ имеет неотрицательное решение, обращающееся в нуль лишь на нигде не плотном множестве.

Пусть x_0 — произвольная точка многообразия M. Выберем форму μ_0 так, чтобы в окрестности точки x_0 соответствующий оператор A записывался в локальных координатах как лапласиан $\Sigma \partial^2 / \partial z_i \partial \bar{z}_i$. Если f — решение уравнения $Af = 0$, о котором говорилось выше, то $f(x_0) > 0$ в силу теоремы о среднем значении для гармонических функций. Форма $f\mu_0$ всюду неотрицательно, а в окрестности точки x_0 положительно определена. Кроме того, $dd^c f\mu_0 = 0$. Покрывая многообразие M конечным числом соответствующих окрестностей и суммируя соответствующие формы, мы получим искомую форму μ.

Доказательство теоремы 1. Пусть B_r — шар C^n радиуса r и пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ — такие отображения шара B_1 в M, что $\varphi_i(B_1)$ являются координатными окрестностями и задают покрытие. Выберем ε таким, чтобы множества $\varphi_i(B_{1-\varepsilon})$ все еще образовывали покрытие. Для каждой точки $z \in B_{1-\varepsilon}$ можно построить такую форму λ_z', что ее носителем будет шар радиуса ε с центром в z, будут выполнены условия 1—4 и, кроме того, $dd^c\lambda_z'$ можно доопределить до C^∞-формы в точке z и $\int\limits_{C^n} dd^c \lambda_z' = 1$.

Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_k$ — разбиение единицы на многообразии M, соответствующее покрытию $\varphi_1(B_{1-\varepsilon}), \ldots, \varphi_k(B_{1-\varepsilon})$. Тогда форма $\lambda_a'' = \Sigma\psi_i(a) \times \times (\varphi_i^{-1})^* \lambda'_{\varphi_i^{-1}(a)}$ удовлетворяет условиям 1—4, и кроме того $dd^c\lambda_a''$ доопределяется в a до C^∞-формы и $\int\limits_M dd^c\lambda_a'' = 1$. Воспользуемся построенной в лемме формой μ. Из общей теории эллиптических уравнений следует, что уравнение $dd^c f\mu = \omega - dd^c\lambda_a''$ имеет регулярное решение f, непрерывно зависящее от a, поскольку правая часть ортогональна ко всем решениям сопряженного уравнения (ими являются константы). Если теперь K подобрать так, чтобы выполнялось неравенство $f + K > 0$, то форма $\lambda_a = \lambda_a'' + (f + K)\mu$ будет искомой.

Рассмотрим теперь комплексное n-мерное многообразие X и предположим, что на X задано исчерпание ψ, т. е. такая неотрицательная вещественная функция, что прообразы компактов являются компактами и критические точки этой функции изолированны. Пусть f — голоморфное отображение многообразия X в компактное комплексное n-мерное многообразие M. Зададим на M формы ω и λ_a, о которых говорилось в теореме 1, и введем следующие обозначения. Через D_t обозначим множество тех $x \in X$, для которых $\psi(x) \leqslant t$. Если точка $a \in M$ такова, что множество $f^{-1}(a) \cap D_t$ дискретно, то через $n(t, a)$ обозначим число точек в $f^{-1}(a) \cap D_t$ с учетом кратности значений. Стандартные рассуждения с применением формулы Стокса приводят к следующему результату.

Теорема 2 (непроинтегрированная первая основная теорема).

$$\int\limits_{D_t} f^*\omega = n(t, a) + \int\limits_{\partial D_t} f^* (d^c\lambda_a).$$

Интегрирование этого равенства по t после несложных преобразований приводит к следующей теореме.

Теорема 3 (первая основная теорема).

$$N(r, a) = T(r) + m(r_0, a) - m(r, a) + \Delta(r, a).$$

Здесь использованы обозначения:

$$N(r, a) = \int_{r_0}^{r} n(t, a)\, dt, \quad T(r) = \int_{r_0}^{r} \Big(\int_{D_t} f^*\omega \Big)\, dt,$$

$$m(r, a) = \int_{\partial D_r} d^c\psi \wedge f^*\lambda_a, \quad \Delta(r, a) = \int_{D_t} dd^c\psi \wedge f^*\lambda_a.$$

Налагая различные условия на исчерпание ψ и на отражение f, можно, подобно тому как это сделано в работах ([3], [8]), получать различные теоремы о равнораспределенности значений. Если, например, исчерпание ψ псевдовогнуто (т. е. форма $dd^c\psi$ отрицательно полуопределена), то $m(r, a) > 0$, $\Delta(r, a) < 0$, $N(r, a) < T(r) + \text{const}$, и, значит, для любого $a \in M$ выполнено соотношение $\overline{\lim}\, N(r, a) / T(r) \leqslant 1$. Из того, что $\int_M N(r, a)\omega = T(r)$, теперь легко получить, что для всех $a \in M$, за исключением множества меры нуль, выполнено соотношение $\overline{\lim}\, N(r, a) / T(r) = 1$. Частный случай, когда в качестве M берется комплексное пространство CP^n, был получен в работе ([8]), где этот результат сформулирован в других терминах.

Владимирский государственный педагогический институт им. П. И. Лебедева-Полянского

Поступило 16 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. S. Chern, Ann. Math., 71, № 3 (1960). [2] H. Levine, ibid., 71, № 2 (1960). [3] W. Stoll, Acta Math., 118, № 1/2, 111, № 3/4, 47 (1967). [4] J. J. Hirschfelder, Inventiones Math., 8, № 1 (1969). [5] H. Wu, J. Differential Geometry, 2, № 2 (1968). [6] H. Wu, ibid., 2, № 2, 4 (1968). [7] H. Wu, ibid., 3, № 1 (1969). [8] S. S. Chern, R. Bott, Acta Math., 114, № 1—2 (1965).