Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 3

УДК 517.53:517.947.42 *МАТЕМАТИКА*

В. М. МИКЛЮКОВ

ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА n-МЕРНЫХ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 19 I 1970)

1. Пусть R^n — n-мерное эвклидово пространство; $\bar{R}^n = R^n \cup \{\infty\}$ — соответствующее пространство Мебиуса; $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка (или вектор) в R^n; $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ — длина вектора. Для произвольной области $\Omega \subseteq \bar{R}^n$: $L_n(\Omega)$ — класс измеримых функций, суммируемых по Ω со степенью n; $W_n^1(\Omega)$ — множество функций $\varphi(x) \in L_n(\Omega)$, имеющих обобщенные производные $\partial\varphi / \partial x_i \in L_n(\Omega)$ $(i = 1, \ldots, n)$; $L_1^n(R^n)$ — множество функций $\varphi(x)$, представимых в виде бесселева потенциала (см. [1,2])

$$\varphi(x) = (G_1 u)(x) \equiv \int\limits_{R^n} G_1(|x-y|)\, u(y)\, dy, \quad u \in L_n(R^n), \tag{1}$$

где $G_1(t)$ — бесселево ядро порядка 1. Вектор-функция $f(x) = (f_1(x), \ldots \ldots, f_n(x))$ принадлежит одному из перечисленных классов в том и только том случае, когда каждая ее компонента $f_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ обладает таким свойством.

Пусть A — произвольное множество в R^n. Рассмотрим всевозможные неотрицательные функции $u(x) \in L_n(R^n)$ такие, что для всех $x \in A$

$$(G_1 u)(x) \geqslant 1.$$

Точная нижняя грань величин $(\|u(x)\|_{L_n(R^n)})$, взятая по множеству всех таких функций $u(x)$, называется $(1, n)$-емкостью (или просто емкостью) множества A.

Данное определение $(1, n)$-емкости является частным случаем определения, приведенного в работе [3]. В той же работе указаны и соотношения между $(1, n)$-емкостью и другими емкостями.

2. Пусть B — открытый шар в R^n, S — его граница. Для произвольной вектор-функции f: $B \to R^n$ полагаем: $E(f)$ — множество точек на S, в которых отображение f имеет угловые граничные значения; $E'(f)$ — множество точек на S таких, что для любой точки $x_0 \in E'(f)$ существует путь $\gamma_{x_0} \subset B$, идущий в x_0, вдоль которого отображение f имеет предел; $E''(f)$ — множество точек $x_0 \in S$, для каждой из которых существует точка $y_0 \in R^n$ такая, что

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \int\limits_{B_h(x_0)} |f(x) - y_0|\, dx = 0, \tag{2}$$

где $B_h(x_0) = \{x \in B \colon |x - x_0| < h\}$.

Лемма 1. *Пусть f: $B \to R^n$ — монотонное отображение класса $W_n^1(B)$ и пусть $\gamma_{x_0} \subset B$ — произвольный путь, идущий в точку $x_0 \in S$. Если для некоторой последовательности точек $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ со свойствами:*

$$x_n \in \gamma_{x_0}, \quad \lim_{n \to \infty} x_n = x_0, \quad \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\operatorname{diam} \overset{\frown}{x_n x_{n+1}}}{\rho(x_n, S)} < 1,$$

где $\rho(x_n, S)$ — расстояние от точки x_n до S, существует предел $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$, то отображение имеет тот же предел вдоль пути γ_{x_0}.

Доказательство приводится аналогично доказательству леммы 3 работы ([4]).

Лемма 2. (см. ([4])). *Пусть f: $B \to R^n$ — монотонное отображение класса $W_n^1(B)$. Тогда $E(f) = E'(f)$.*

Исходя из условия (2) и последовательно применяя предыдущие леммы, нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 3. *Пусть f: $B \to R^n$ — монотонное отображение класса $W_n^1(B)$. Тогда $E''(f) \subseteq E(f)$.*

Формулируемая ниже лемма 4 является простым следствием теоремы 5.7 работы ([3]) (см. также ([2])).

Лемма 4. *Пусть f: $R^n \to R^n$ — вектор-функция класса $L_1^n(R^n)$ и пусть $f_1 = f|_B$ — ее сужение на B. Тогда множество $S \setminus E''(f_1)$ есть множество нулевой емкости.*

Следующая теорема представляет собой обобщение соответствующих результатов из ([4–6]).

Теорема 1. *Пусть f: $B \to R^n$ — монотонное отображение класса $W_n^1(B)$. Тогда множество $S \setminus E(f)$ есть множество емкости нуль.*

Приведем идею доказательства. В силу теоремы о продолжении (см., например, ([1]), стр. 144) существует вектор-функция f^*: $R^n \to R^n$ класса $W_n^1(R^n)$ такая, что $f^*|_B = f$. Далее, по теореме 5.1 работы ([3]) (см. также ([2])) найдется вектор-функция f^{**}: $R^n \to R^n$ класса $L_1^n(R^n)$, почти всюду в R^n совпадающая с f^*.

Рассмотрим $f_1 = f^{**}|_B$. Для почти всех $x \in B$ имеем $f_1(x) = f(x)$ и, следовательно, $E''(f_1) = E''(f)$. По лемме 4 множество $S \setminus E''(f_1) = S \setminus E''(f)$ есть множество емкости нуль. Применяя лемму 3, убеждаемся в справедливости теоремы.

Замечание. Данную теорему можно распространить (в соответствующих терминах) и на монотонные отображения класса $W_p^1(B]$, где $p > n-1$ (см. ([7])).

3. Пусть $A \subset \Omega$ — замкнутое относительно области $\Omega \subset R^n$ множество, не имеющее внутренних точек, и пусть f: $(\Omega \setminus A) \to R^n$ — отличное от тождественной постоянной квазиконформное отображение. Отнесем каждой точке $x_0 \in A$ следующие множества значений (см. ([8])).

Предельное множество $C_{\Omega\setminus A}(f, x_0)$. Значение $y \in C_{\Omega\setminus A}(f, x_0)$, если существует последовательность точек $\{x_n\}$ со свойствами

$$x_n \in \Omega \setminus A, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y.$$

Множество повторяющихся значений $R_{\Omega\setminus A}(f, x_0)$. Значение $y \in R_{\Omega\setminus A}(f, x_0)$, если существует последовательность точек $\{x_n\}$ со свойствами

$$x_n \in \Omega \setminus A, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad f(x_n) = y.$$

В работе ([10]) нами были даны некоторые критерии стираемости особых множеств *. Формулируемые ниже результаты касаются строения множеств $C_{\Omega\setminus A}(f, x_0)$, $R_{\Omega\setminus A}(f, x_0)$ в случае, когда A есть множество существенно особых точек.

Теорема 2. *Пусть $A \subset \Omega$ — произвольное компактное относительно области $\Omega \subset R^n$ множество емкости нуль. Предположим, что f: $(\Omega \setminus A) \to R^n$ — квазиконформное отображение (неоднолистное), имеющее в каждой точке $x_0 \in A$ существенную особенность. Тогда предельное множество $C_{\Omega\setminus A}(f, x_0) = R^n$.*

---

* Пользуясь случаем, отметим, что формулируемая в ([10]) теорема 1 содержательна только при $\alpha = n$. При $\alpha > n$ класс множеств нулевой α-емкости пуст.

Для двумерных квазиконформных отображений данное утверждение доказано в ([9]) (см. также ([8])).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда в любой окрестности точки $x_0 \in A$ отображение f принимает бесконечно часто каждое значение $y \in R^n$ за возможным исключением множества емкости нуль; т. е. множество $\bar{R}^n \setminus R_{\mathfrak{N},A}(f, x_0)$ есть множество емкости нуль.*

В случае, когда x_0 — изолированная существенно особая точка, данная теорема принадлежит Ю. Г. Решетняку (сообщение на Донецком коллоквиуме по квазиконформным отображениям, 1968).

Донецкий вычислительный центр
Академии наук УССР

Поступило
7 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, «Наука», 1969. [2] N. Aronszajn, Mulla Fuad, P. Szeptycki, Ann. de l'Inst. Fourier, 13, 211 (1963). [3] Ю. Г. Решетняк, Сибирск. матем. журн., 10, № 5, 1109 (1969). [4] В. М. Миклюков, Вопросы геометрической теории функций, в. 4, Тр. Томск. гос. унив., 189, 80 (1966). [5] A. Beurling, Acta Math., 72, № 1—2, 1 (1940). [6] В. А. Зорич, ДАН, 177, № 4, 771 (1967). [7] В. А. Жуков, В. М. Миклюков, Вопросы геометрической теории функций, в. 5, Тр. Томск. гос. унив., 200, 88 (1968). [8] К. Носиро, Предельные множества, ИЛ, 1963. [9] M. Ohtsuka, Nagoya Math. J., 11, 131 (1957). [10] В. М. Миклюков, ДАН, 188, № 3, 525 (1969).