Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 3

УДК 519.214 *МАТЕМАТИКА*

А. В. НАГАЕВ

О РОЛИ КРАЙНИХ ЧЛЕНОВ ВАРИАЦИОННОГО РЯДА В ОБРАЗОВАНИИ БОЛЬШОГО УКЛОНЕНИЯ СУММЫ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

(Представлено академиком Ю. В. Линником 20 I 1970)

Пусть ξ_j, $j = 1, 2, \ldots$, — независимые одинаково распределенные случайные величины $M\xi_j = 0$, $D\xi_j = \sigma^2 < \infty$. Пусть далее

$$\underset{\sim}{\xi} = \xi_1^* \leqslant \xi_2^* \leqslant \ldots \leqslant \xi_n^* = \tilde{\xi} \tag{1}$$

вариационный ряд, построенный по реализации $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Нас будет интересовать предельный закон распределения крайних членов ряда (1) при условиях, налагаемых на сумму $\zeta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$.

Сначала будем считать, что случайные величины ξ_j имеют абсолютно непрерывное распределение с ограниченной плотностью $p(x)$, причем при $x \to 0$

$$p(x) \sim e^{-x^\alpha}, \quad \alpha > 0. \tag{2}$$

Положим, как обычно,

$$\Phi(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{w} e^{-u^2/2}\, du.$$

Пусть далее последовательности A_n и B_n удовлетворяют равенствам *

$$2n \exp\{-A_n^2/2\} = A_n \sqrt{2\pi}, \quad B_n = A_n^{-1}, \tag{3}$$

а последовательности a_n и b_n таковы, что

$$n \exp\{-a_n^\alpha\} = \alpha a_n^{\alpha-1}, \quad b_n = \alpha a_n^{1-\alpha}. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть в соотношении* (2) $\alpha > 1$. *Тогда*

1°. *Если* $0 \leqslant x \leqslant n(\ln n)^{-\gamma}$, $\gamma > 1/\alpha$, *то при* $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi} < a_n + b_n z \mid \zeta_n = x\} = \mathbf{P}\{\tilde{\xi} < a_n + b_n z\} + o(1) = \\ = \exp\{-e^{-z}\} + o(1)$$

равномерно по z, $z \geqslant z_0 > -\infty$.

2°. *Если же* $x \geqslant n(\ln n)^{\gamma_1}$, $\gamma_1 > \max(12/\alpha, 1/(\alpha - 1))$, *то при* $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\left\{\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left|\xi_j - \frac{x}{n}\right| \sqrt{\frac{x^{\alpha-2}}{\alpha(\alpha-1)}} < A_n + B_n z \mid \zeta_n = x\right\} = \\ = \exp\{-e^{-z}\} + o(1)$$

равномерно по z, $z \geqslant z_0 > -\infty$.

---

* Легко видеть, что равномерно по z, $-\infty < z < \infty$,

$$\mathbf{P}\{\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\eta_j| < A_n + B_n z\} = \exp\{-e^{-z}\} + o(1),$$

где η_j независимы и распределены нормально с параметрами $(0, 1)$.

Здесь последовательности A_n, B_n, a_n и b_n определяются уравнениями (3) и (4).

Теорема 2. *Пусть в соотношении* (2) $0 < \alpha < 1$. *Пусть далее* $M|\xi_1|^k < \infty$, $k = 4 + \left[\frac{2\alpha - 1}{1 - \alpha}\right]$ (*в частности, при* $0 < \alpha < {}^1/_2$ *имеем* $k = 3$). *Тогда:*

1°. *Если* $0 \leqslant x \leqslant (c_\alpha - \delta)\sigma^{2/(2-\alpha)} n^{1/(2-\alpha)}$, $c_\alpha = (2-\alpha)(2-2\alpha)^{(\alpha-1)/(2-\alpha)}$, *где* $\delta > 0$ — *сколь угодно малое положительное число, то при* $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\{\xi < a_n + b_n z \mid \zeta_n = x\} = \mathbf{P}\{\xi < a_n + b_n z\} + o(1) = \\ = \exp\{-e^{-z}\} + o(1)$$

равномерно по z, $z \geqslant z_0 > -\infty$, *и* w, $-\infty < w < \infty$.

2°. *Если же* $(c_\alpha - \delta)\sigma^{2/(2-\alpha)} n^{1/(2-\alpha)} < x = o(n^{1/(2-2\alpha)})$, *то при* $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\{\overset{*}{\xi}_{n-1} < a_n + b_n z;\ \bar{\xi} - (1-\beta)x < w\sigma\sqrt{n} \mid \zeta_n = x\} = \\ = \exp\{-e^{-z}\}\,\Phi\left(\frac{w}{\sigma_1}\right) + o(1)$$

равномерно по z, $z \geqslant z_0 > -\infty$, *и* w, $-\infty < w < \infty$.

При этом величина β *является меньшим положительным корнем уравнения*

$$n\sigma^2 / x^{2-\alpha} = \beta(1-\beta)^{1-\alpha} / \alpha,$$

если $0 < \alpha < {}^1/_2$, *и уравнения*

$$\frac{n\sigma^2}{x^{2-\alpha}} = \frac{\beta(1-\beta)^{1-\alpha}}{\alpha}\left[1 - \sigma^2 \sum_{j=0}^{k-4} (j+3)\lambda_j \left(\frac{\beta x}{n}\right)^{j+1}\right],$$

если ${}^1/_2 \leqslant \alpha < 1$.

Здесь последовательности a_n и b_n определяются равенствами (4), а λ_j, $j = 0, \ldots, k-4$ — первые коэффициенты ряда Крамера (см. ([1]), равенство (19)), $\sigma_1 = (1 - \alpha(1-\alpha)n\sigma^2 / (1-\beta)^{1+\varepsilon}x^{1+\varepsilon})^{-1/2}$.

Теорема 3. *Пусть в соотношении* (2) $0 < \alpha < 1$. *Тогда:*

1°. *Если* $n^{1/(2-2\alpha)} \asymp x$, *то при* $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\{\overset{*}{\xi}_{n-1} < a_n + b_n z;\ \bar{\xi} - x + n\alpha\sigma^2 x^{\alpha-1} < w\sigma\sqrt{n} \mid \zeta_n = x\} = \\ = \exp\{-e^{-z}\}\,\Phi(w) + o(1)$$

равномерно по z, $z \geqslant z_0 > -\infty$, *и* w, $-\infty < w < \infty$.

2°. *Если же* $n^{1/(2-2\alpha)} = o(x)$, *то при* $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\{\overset{*}{\xi}_{n-1} < a_n + b_n z;\ \bar{\xi} < x + w\sigma\sqrt{n} \mid \zeta_n = x\} = \\ = \exp\{-e^{-z}\}\,\Phi(w) + o(1)$$

равномерно по z, $z \geqslant z_0 > -\infty$, *и* w, $-\infty < w < \infty$.

Приведенные теоремы уточняют рассуждения о природе больших уклонений, содержащиеся в работах ([2,3]). Опишем теперь вкратце случай, когда случайные величины целочисленны. Пусть вместо представления (2) справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} \sim e^{-k^\alpha}, \quad \alpha > 0. \tag{5}$$

При выполнении условия (5) утверждения теорем 2 и 3 сохраняют силу. Если в соотношении (5) $1 < \alpha < 2$, то справедливо также утверждение п.2° теоремы 1. В условиях п.1° теоремы 1 не существует даже безусловного предельного распределения для ξ. По поводу случая $\alpha \geqslant 2$ см. работу ([4]).

Если не требовать существования плотности распределения у случайных величин ξ_j и не предполагать их целочисленности, то приходится исследовать предельное поведение наших порядковых статистик при условии, что $\zeta_n > x$. Например, справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть вместо представления* (2) *справедливо соотношение*

$$1 - F(x) \sim x^{-\gamma}, \quad \gamma > 2. \tag{6}$$

Тогда при $n \to \infty$, $x / \ln x \geqslant \sqrt{n}$

$$\mathbf{P}\{\xi^*_{n-1} < zn^{1/\gamma};\ \bar{\xi} > x + wx \mid \zeta_n > x\} =$$
$$= \exp\{-z^{-\gamma}\}(1+w)^{-\gamma} + o(1)$$

равномерно по z, $z \geqslant z_0 > -\infty$, *и* w, $w \geqslant 0$.

Условия (2), (5) и (6) носят односторонний характер, поэтому приведенные выше теоремы (кроме п. 2° теоремы 1) описывают предельный закон распределения лишь для крайних правых членов ряда (1). Если уточнить поведение вероятности $\mathbf{P}\{\xi_1 < x\}$ при $x \to -\infty$, то можно получить явное выражение для предельного распределения статистик $\underline{\xi}$, $\bar{\xi}$ и ξ^*_{n-1}. К примеру, вместо п. 2° теоремы 3 может быть сформулирована следующая

Теорема 5. *Пусть в представлении* (2) $0 < \alpha < 1$, *а при* $x \to \infty$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 < -x\} \sim x^{-\gamma}, \gamma > 4 + \left[\frac{2\alpha - 1}{1 - \alpha}\right].$$

Тогда при $n^{1/(2-2\alpha)} = o(x)$

$$\mathbf{P}\{-yn^{1/\gamma} < \underline{\xi};\ \xi^*_{n-1} < a_n + b_n z;\ \bar{\xi} < x + w\sigma\sqrt{n} \mid \zeta_n = x\} =$$
$$= \exp\{-y^{-\gamma} - e^{-z}\}\,\Phi(w) + o(1)$$

равномерно по y, z *и* w, $y \geqslant 0$, $z \geqslant z_0 > -\infty$, $-\infty < w < \infty$.

Институт математики им. В. И. Романовского
Академии наук УзССР
Ташкент

Поступило
26 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Крамер, УМН, 10, 166 (1944). [2] С. В. Нагаев, Зимняя школа по теории вероятностей и матем. статистике, Киев, 1964, стр. 147. [3] А. В. Нагаев, ДАН, 180, № 2, 279 (1968). [4] А. В. Нагаев, Сборн. Предельные теоремы и вероятностные процессы, Ташкент, 1967, стр. 71.