Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 3

УДК 513.83 *МАТЕМАТИКА*

С. Й. НЕДЕВ

НЕПРЕРЫВНЫЕ И ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫЕ о-МЕТРИКИ

(Представлено академиком П. С. Александровым 21 I 1970)

Определение 1 (С. Й. Недев ([1])). Топологическое пространство X называется о-метризуемым о-метрикой ρ, если ρ есть неотрицательная функция на квадрате $X\times X$, удовлетворяющая следующим двум условиям: 1) $\rho(x, y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$; 2) если $F\subset X$, то F замкнуто в X тогда и только тогда, когда для каждой точки $x\notin F$ выполнено соотношение

$$\rho(x, F)=\inf\{\rho(x, y)/y\in F\}>0.$$

Если функция ρ симметрична, т. е. если для любых двух точек $x, y\in X$ имеет место равенство $\rho(x, y)=\rho(y, x)$, то ρ называется симметрикой, а пространство X — симметризуемым.

Если, кроме условий 1) и 2), функция ρ удовлетворяет еще неравенству треугольника, т. е. если для любых трех точек $x, y, z\in X$ имеет место неравенство $\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, y)$, то ρ называется Δ-метрикой, а пространство X — Δ-метризуемым.

Если функция ρ является симметрикой и Δ-метрикой одновременно, то она называется метрикой, а пространство X — метризуемым.

Класс о-метризуемых пространств достаточно широк — все пространства с первой аксиомой счетности о-метризуемы. Существует, однако, возможность с помощью чисто аналитических ограничений на о-метрику осуществить весьма тонкую классификацию той обширной области топологических пространств, которую заполняют о-метризуемые пространства. Мы здесь приведем только такие ограничения, которые понадобятся нам в этой работе.

Условие (h). Для любой точки $x\in X$ и для любого $\varepsilon>0$ $x\in\langle O_\varepsilon^\rho x\rangle$, где $O_\varepsilon^\rho x=\{y/\rho(x, y)<\varepsilon\}$.

о-Метрику ρ, удовлетворяющую условию (h), мы называем сильной о-метрикой, а пространство X, чью топологию она задает,— сильно о-метризуемым о-метрикой ρ.

Условие (АН) (П. С. Александров, В. В. Немыцкой ([2])). Для любой точки $x\in X$ и любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(x, \varepsilon)>0$ такое, что из $\rho(x, y)<\delta$ и $\rho(x, z)<\delta$ следует $\rho(y, z)<\varepsilon$.

Слабое условие Коши (А. В. Архангельский ([3])). Если множество A не замкнуто, то для любого $\varepsilon>0$ существуют точки $x, y\in A$ такие, что $\rho(x, y)<\varepsilon$ и $x\neq y$.

Условие (K) (А. В. Архангельский ([4])). Если F и Φ — бикомпакты, то $\rho(F, \Phi)>0$.

Условие (А) (А. В. Архангельский ([4])). Если множество F замкнуто, а Φ — бикомпакт, то $\rho(F, \Phi)>0$.

Теорема 1. (А. В. Архангельский ([4])). *Если T_2-пространство X симметризуемо симметрикой, удовлетворяющей условию* (А), *то X метризуемо.*

Теорема 2 (П. С. Александров, В. В. Немыцкий ([2])). *T_1-пространство X тогда и только тогда симметризуемо симметрикой, удовлетворяющей* *условиям* (h) *и* (АН), *когда X обладает измельчающейся последовательностью покрытий* *.

Теорема 3 (С. Й. Недев ([5]), теорема 31 **). *Если пространство X о-метризуемо о-метрикой ρ и для каждой точки $x_0 \in X$ функция $f_{x_0}(x) = \rho(x_0, x)$ равномерно непрерывна относительно ρ, то X метризуемо.*

Определение 2. Если пространство X о-метризуемо о-метрикой ρ и отображение ρ: $X \times X \to E^1$ (E^1 — пространство вещественных чисел) непрерывно, то о-метрика ρ называется непрерывной о-метрикой.

Определение 3. Если пространство X о-метризуемо о-метрикой ρ и если для каждой точки $x_0 \in X$ функция $f_{x_0}(x) = \rho(x_0, x)$ непрерывна на X, то ρ называется слабонепрерывной о-метрикой.

Лемма 1. *о-Метрика ρ, порождающая топологию пространства X, является сильной о-метрикой тогда и только тогда, когда для каждой точки $x_0 \in X$ функция $f_{x_0}(x) = \rho(x_0, x)$ непрерывна в точке x_0.*

Лемма 2. *О-метрика ρ, порождающая топологию пространства X, тогда и только тогда является сильной о-метрикой, удовлетворяющей условию* (АН), *когда отображение ρ: $X \times X \to E^1$ непрерывно в точках диагонали.*

Лемма 3. *Если пространство X о-метризуемо полунепрерывной о-метрикой ρ, то X вполне регулярно и все шаровые относительно ρ окрестности точек (т. е. множества вида $O_\varepsilon{}^\rho x$) открыты в X.*

Лемма 4. *Пусть пространство X симметризуемо симметрикой ρ. Если все шаровые относительно ρ окрестности точек открыты в X, то ρ удовлетворяют слабому условию Коши.*

Теорема 4. *Если пространство X о-метризуемо непрерывной о-метрикой ρ, то X вполне регулярно, а ρ является сильной о-метрикой, удовлетворяющей условиям* (АН) *и* (К). *Следовательно, X обладает измельчающейся последовательностью покрытий.*

Пример 1 (А. В. Архангельский). Пример финально компактного неметризуемого пространства X, симметризуемого полунепрерывной симметрикой.

Точками пространства X служат точки верхней полуплоскости E и точки граничной прямой E^1, т. е. $X = E \cup E^1$. Для любых двух точек $x, y \in X$ пусть $|x - y|$ обозначает обычное эвклидово расстояние между ними, а $a(x, y)$ — наименьший угол между прямыми (x, y) и E^1 в радианах. Введем на X симметрику $d(x, y)$ следующим образом: а) если $x \in E^1$, то $d(x, y) = d(y, x) = |x - y| + a(x, y)$; б) если $x, y \in E$ и x и y находятся на одной горизонтали, то $d(x, y) = d(y, x) = |x - y|$; в) если $x, y \in E$, y выше x и z — общая точка прямых (x, y) и E^1, то $d(x, y) = d(y, x) = |x - y| d(y, z) / |y - z|$.

Полунепрерывность симметрики d проверяется непосредственно. Также легко заметить, что как E, так и E^1 наследуют из X свои обычные эвклидовы топологии. Отсюда следует, что X финально компактно. С другой стороны, вес пространства X не меньше континуума и, значит, X не метризуемо.

Следствие 1. Условие (АН) и слабое условие Коши не эквивалентны.

Пример 2. Пример пространства X без σ-консервативной сети ***, симметризуемого полунепрерывной симметрикой.

Точками пространства X служат точки плоскости. Вводим на X симметрику $d(x, y) = |x - y| + a(x, y)$ (обозначения взяты из примера 1).

---

* Последовательность покрытий $\{\omega_n | n = 1, 2, \ldots\}$ называется измельчающейся, если для каждой точки x и ее окрестности O_x найдется n, для которого $\omega_n x \subset O_x$ (П. С. Александров, П. С. Урысон ([6])).

** Теорема 31 из ([5]) значительно сильнее приведенной здесь теоремы 3.

*** Семейство $S = \{s_\alpha | \alpha \in A\}$ подмножеств пространства X называется сетью, если для каждого открытого в X множества U и каждой точки $x \in U$ найдется $\alpha \in A$ такое, что $x \in s_\alpha \subset U$ (А. В. Архангельский ([8])).

Впервые пример регулярного симметризуемого пространства без σ-консервативной сети построил Я. А. Кофнер (7). Отметим, что каждое о-метризуемое непрерывной о-метрикой пространство обладает σ-дискретной сетью.

Теорема 5. *Пусть X симметризуемо полунепрерывной симметрикой и $\tau = \inf\{|X'| / X' \subset X,\ X'$ всюду плотно в $X\}$. Тогда X допускает взаимно однозначное непрерывное отображение в I^{τ} (I — единичный отрезок).*

Следствие 2. *Если сепарабельное пространство X симметризуемо полунепрерывной симметрикой, то X уплотняется на метрическое пространство, причем это уплотнение является гомеоморфизмом на всюду плотном множестве и, следовательно, X содержит всюду плотное метризуемое подпространство, являющееся множеством типа G_δ в X.*

Теорема 6. *Если пространство X симметризуемо такой симметрикой ρ, что для каждого счетного замкнутого множества $F \subset X$ функция $f_F(x) = \rho(F, x)$ непрерывна на X, то X метризуемо, так как тогда ρ удовлетворяет условию* (A).

Отметим, что в теореме 6 слова симметризуемо и симметрика могут быть заменены словами Δ-метризуемо и Δ-метрика.

Лемма 5. *Если пространство X симметризуемо непрерывной симметрикой ρ, то для каждого бикомпакта $F \subset X$ функция $f_F(x) = \rho(F, x)$ непрерывна на X.*

Пример 3. Пример неметризуемого, симметризуемого непрерывной симметрикой пространства X, представимого в виде суммы $X = X_1 \cup X_2$, где X_1 счетно, а X_2 дискретно в X.

Пусть $X' = E \cup E_1$. Для каждой точки $x \in X'$ пусть h_x обозначает ординату, а l_x — абсциссу точки x (в некоторой фиксированной ортогональной координатной системе, имеющей в качестве оси абсцисс прямую E^1). Введем на X' симметрику $d(x, y)$ по следующему правилу: а) если $h = \max\{h_x, h_y\} > 0$, то $d(x, y) = |l_x - l_y|^h + |x - y|$; б) если $h = 0$ и $x \neq y$, то $d(x, y) = 1 + |x - y|$; в) если $x = y$, то $d(x, y) = 0$.

Непрерывность симметрики d следует непосредственно из ее определения. Отметим, что топология τ_d (τ_d — топология, определенная симметрикой d в смысле п. 2) определения 1) индуцирует на E обычную эвклидову топологию, а на E^1 — дискретную топологию. Пространство X' связно, локально связно, сепарабельно, локально удовлетворяет второй аксиоме счетности, но второй аксиоме счетности не удовлетворяет. Следовательно, оно не метризуемо. Пусть теперь $X = X_1 \cup X_2$ — подпространство пространства X', где X_1 — подмножество E, состоящее из всех точек с рациональными координатами и $X_2 = E^1$. Легко видеть, пространство X (а следовательно и пространство X') не нормально.

В силу теоремы 4 пространства X и X', построенные в примере 3, обладают измельчающимися последовательностями покрытий.

В работе Джонса (9) доказано следующее утверждение:

В предположении, что $2^{\aleph_1} > 2^{\aleph_0}$, каждое нормальное сепарабельное пространство с измельчающейся последовательностью покрытий метризуемо. Таким образом, встала проблема: можно ли в цитированной теореме Джонса освободиться от предположения $2^{\aleph_1} > 2^{\aleph_0}$? В связи с этим приведем следующую теорему:

Теорема 7. *Каждое неметризуемое, регулярное, сепарабельное пространство с измельчающейся последовательностью покрытий содержит неметризуемое подпространство Z, представимое в виде $Z = Z_1 \cup Z_2$, где Z_1 счетно, а Z_2 дискретно в Z. Отметим, что Z локально счетно.*

Теорема 8. *Если пространство X Δ-метризуемо непрерывной Δ-метрикой, то X метризуемо.*

Пример 4. Пространство стрелки является примером неметризуемого наследственно финально компактного сепарабельного пространства, Δ-метризуемого полунепрерывной Δ-метрикой.

Лемма 6. *Если как о-метрика p, заданная на множестве X, так и ее сопряженная q $(q(x, y) = p(y, x))$ являются сильными о-метриками, то любое открытое в топологии τ_p (τ_q) множество U является множеством типа F_σ в топологии τ_q (τ_p).*

Лемма 7. *Если p есть Δ-метрика на множестве X и если топологии τ_p и τ_q (где $q(x, y) = p(y, x)$ — сопряженная к p Δ-метрика) сравнимы по включению, то каждое из пространств (X, τ_p) и (X, τ_q) обладает измельчающейся последовательностью покрытий и хотя бы одно из них метризуемо.*

Теорема 9. *Любое T_1-пространство X с равномерной базой* Δ-метризуемо Δ-метрикой p, удовлетворяющей условиям:* а) *для любых трех точек $x, y, z \in X$ $p(x, y) \leqslant \max\{p(x, z), p(z, y)\}$;* б) *$\tau_p \subset \tau_q$, где q — сопряженная к p Δ-метрика.*

Поэтому пространство (X, τ_q) метризуемо и нульмерно. Отметим, что $p = p(B)$ соответствует однозначно любой равномерной базе B пространства X.

Теорема 10. *Если X — нормальное пространство с равномерной базой, то X о-метризуемо полунепрерывной о-метрикой ρ, удовлетворяющей следующему условию: для любых трех точек $x, y, z \in X$ имеет место неравенство $\rho(x, y) \leqslant 2(\rho(x, z) + \rho(z, y))$.*

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
9 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Й. Недев, Докл. Болгарск. АН, **20**, № 6, 513 (1967). [2] П. С. Александров, В. В. Немыцкий, Матем. сборн., 3, № 3, 663 (1938). [3] А. В. Архангельский, ДАН, **164**, № 2, 274 (1965). [4] А. В. Архангельский, УМН, **21**, в. 4 (130), 133 (1966). [5] С. Й. Недев, Тр. Моск. матем. общ., **24** (в печати). [6] П. С. Александров, П. С. Урысон, Необходимое и достаточное условие для того, чтобы топологическое пространство было метризуемо, В книге П. С. Урысон, Тр. по топологии и другим областям математики, 2, М.—Л., 1951. [7] Я. А. Кофнер, ДАН, **187**, № 2, 270 (1969). [8] А. В. Архангельский, ДАН, **132**, № 3, 495 (1960). [9] F. B. Jones, Bull. Am. Math. Soc., **43**, 671 (1937). [10] П. С. Александров, Бюлл. Польск. Акад. наук, сер. матем., 8, № 3, 135 (1960).

* База $B = \{U_\alpha | \alpha \in A\}$ пространства X называется равномерной, если для каждой точки $x \in X$ и для каждой ее окрестности O_x мощность множества $M_{x, U} = \{\alpha \in H | x \in U_\alpha, U_\alpha \setminus O_x \neq \Lambda\}$ конечна (П. С. Александров ([10])).