Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 3

УДК 519.1 *МАТЕМАТИКА*

А. Я. ПЕТРЕНЮК

# О СУЩЕСТВОВАНИИ ВЗВЕШЕННЫХ КОНЕЧНЫХ ИНЦИДЕНТНЫХ СТРУКТУР

*(Представлено академиком П. С. Александровым 21 I 1970)*

В статье вводится понятие весовой функции конечной инцидентной структуры; с помощью этого понятия найдены необходимые условия существования $l$-взвешенных структур, определенных ниже.

Пусть $v$ — натуральное число, $v \geqslant 4$, и пусть $E$ — множество, состоящее из $v$ элементов. Символом $P(E)$ обозначается совокупность подмножеств множества $E$. Пусть $n(\beta)$ — функция, определенная на $P(E)$ и принимающая значения в множестве $Z^+$ неотрицательных целых чисел. Эта функция определяет на $E$ (конечную) инцидентную структуру (кратко: структуру), содержащую подмножество $\beta \subseteq E$ точно $n(\beta)$ раз. Элементы множества $P(E)$, входящие в структуру, называются блоками, а функция $n(\beta)$ — функцией кратностей блоков в структуре. Если $H$ — конечное множество, то через $|H|$ часто обозначают число элементов в $H$; число $|\beta|$ называется объемом блока $\beta$.

Каждая структура задает на $P(E)$ функцию

$$\rho(X) = \sum_{\{\beta: X \subset \beta\}} n(\beta), \tag{1}$$

которую будем называть весовой функцией структуры.

Пусть $K = \{k_1, \ldots, k_s\}$ — набор натуральных чисел; $l$ — натуральное число, $2 \leqslant l < k_1 < \ldots < k_s < v$; $P_l(E) = \{L: L \subset E, |L| = l\}$ и на $P_l(E)$ задана функция $\lambda(L)$ со значениями в $Z^+$. Структура, для каждого блока $\beta$ которой выполняется включение $|\beta| \in K$ и в которой для каждого $L \in P_l(E)$ выполняется равенство

$$\rho(L) = \lambda(L), \tag{2}$$

называется $l$-взвешенной структурой типа $C(K, l, \lambda(L), E)$. Подструктура $A_i$ $l$-взвешенной структуры $A$, определяемая функцией кратностей блоков

$$n_i(\beta) = \begin{cases} n(\beta), & \text{если } |\beta| = k_i, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

называется $i$-й эквиблочной составляющей структуры $A$; весовая функция $A_i$ обозначается $\rho_i(X)$.

Подсчитывая двумя разными способами число появлений подмножеств $D$ таких, что $T \subset D \subset E$, в $i$-й эквиблочной составляющей, получим, что справедливо равенство

$$\binom{k_i - t}{d - t} \rho_i(T) = \sum_{\substack{H \subset E \setminus T \\ |H| = d - t}} \rho_i(T \cup H), \tag{3}$$

где $d$ — натуральное число, $0 \leqslant |T| = t < d \leqslant k_i$, $T \subset E$.

Полагая в (3) $d = l$ и суммируя равенства (3) по индексу $i$, получим, учтя (2) и очевидную формулу $\rho(X) = \sum_{i=1}^{s} \rho_i(X)$, следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть имеется $l$-взвешенная структура типа $C(K, l, \lambda(L), E)$. Тогда соотношение*

$$\sum_{i=1}^{s} \binom{k_i - t}{l - t} \rho_i(T) = \sum_{\substack{H \subset E \setminus T \\ |H| = l - t}} \lambda(T \cup H) \tag{4}$$

*выполняется при любом $T$, $T \subset E$, $0 \leqslant |T| = t < l$.*

Будем обозначать через $d[n_i|_{i=1}^{s}]$ общий наибольший делитель целых чисел $n_1, \ldots, n_s$.

Теорема 2. *Для существования $l$-взвешенной структуры типа $C(K, l, \lambda(L), E)$ необходимо выполнение условий*

$$\Sigma\lambda(T \cup H) \Big/ d\left[\binom{k_i - t}{l - t}\Big|_{i=1}^{s}\right] = \text{целому числу} \tag{5}$$

*при всех $T$, $T \subset E$, $0 \leqslant |T| = t < l$. Суммирование в (5) производится по всем $H$, $H \subset E \setminus T$, $|H| = l - t$.*

Условие (5) непосредственно следует из (4).

В случае, когда функция $\lambda(L)$ тождественно равна натуральному числу $\lambda$, $l$-взвешенная структура типа $C(K, l, \lambda, E)$ называется $l$-уравновешенной. При $s = 1$ последняя представляет собой тактическую конфигурацию ([1, 3]), которая при $l = 2$ называется уравновешенной неполной блок-схемой ([2]). Условие (5) для случая $l$-уравновешенных структур принимает вид

$$\lambda\binom{v - t}{l - t} \Big/ d\left[\binom{k_i - t}{l - t}\Big|_{i=1}^{s}\right] = \text{целому числу},\ t = 0, 1, \ldots, l - 1. \tag{6}$$

Соотношение (4) при $\lambda(L) \equiv \lambda$, $l = 2$ и $t = 0$ встречается в ([2]). Условия (6) при $s = 1$ превращаются в известные условия существования тактических конфигураций ([1]).

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
16 I 1970

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Hanani, Canad. J. Math., 15, № 4, 702 (1963). [2] R. C. Bose, Canad. J. Math., 12, № 2, 177 (1960). [3] А. Я. Петренюк, Матем. заметки, 4, в. 4, 417 (1968).