Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 3

УДК 513.881

МАТЕМАТИКА

А. И. ПЛОТКИН

ОБ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРАХ НА ПОДПРОСТРАНСТВАХ L^p

(Представлено академиком В. И. Смирновым 28 XI 1969)

В этой заметке обобщаются и усиливаются результаты, полученные в работе ([3]), в которой приведены также некоторые сведения по истории вопроса.

1. Пусть (X_1, σ_1) и (X_2, σ_2) — два пространства с положительными нормированными мерами и $0 < p < \infty$. Мы будем рассматривать комплексные пространства $L^p(\sigma_j)$, $j = 1, 2$; ради краткости формулировок число $\left(\int\limits_{X_j} |f|^p d\sigma_j\right)^{1/p}$ будем называть L^p-нормой функции $f \in L^p(\sigma_j)$ и в случае $0 < p < 1$.

Основой для всего дальнейшего является следующая

Лемма 1. *Пусть p — не целое четное и $f_j \in L^p(\sigma_j)$, $j = 1,2$. Предположим, что для всякого (комплексного) z*

$$\int\limits_{X_1} |1 + zf_1|^p d\sigma_1 = \int\limits_{X_2} |1 + zf_2|^p d\sigma_2. \tag{1}$$

Тогда $|f_1|$ и $|f_2|$ равнораспределены, т. е. для всех $\lambda \geqslant 0$

$$\sigma_1(\{|f_1| \geqslant \lambda\}) = \sigma_2(\{|f_2| \geqslant \lambda\}).$$

Доказательство. Пусть φ и ψ — ограниченные функции на $[0, 1]$. Положим

$$h_1(z) = \int\limits_0^1 \psi(t)\, dt \int\limits_0^{2\pi} |1 + z\varphi(t) e^{i\theta}|^p d\theta,$$

$$h(z) = \int\limits_1^2 ds \int\limits_1^2 h_1(stz)\, dt.$$

Тогда h дважды непрерывно дифференцируема на $(0, \infty)$, $h(z) = h(|z|)$, и для всех $r \geqslant 0$

$$\int\limits_{X_1} h(rf_1)\, d\sigma_1 = \int\limits_{X_2} h(rf_2)\, d\sigma_2. \tag{2}$$

Кроме того, функции φ и ψ можно выбрать так, чтобы существовало число q, $0 < q < p$, такое, что

$$\int\limits_0^\infty |h(x)|\, x^{-q-1} dx < \infty.$$

Пусть H — преобразование Меллина для h; тогда H суммируема на прямой $\operatorname{Re}\zeta = -q$ и для $x \geqslant 0$

$$h(x) = \int\limits_{\operatorname{Re}\zeta = -q} H(\zeta) x^{-\zeta} d\zeta.$$

Отсюда при $j = 1, 2$ *и* $r \geqslant 0$ *имеем*

$$\int\limits_{X_j} h(rf_j)\, d\sigma_j = \int\limits_{X_j} h(r\,|\,f_j\,|)\, d\sigma_j = \int\limits_{\operatorname{Re}\zeta=-q} H(\zeta)\, G_j(\zeta)\, r^{-\zeta} d\zeta, \tag{3}$$

где

$$G_j(\zeta) = \int\limits_{X_j} |\,f_j\,|^{-\zeta} d\zeta.$$

Учитывая (2), из (3) получаем, что $G_1 = G_2$ на прямой $\operatorname{Re}\zeta = -q$. Положим $a_j(\lambda) = \sigma_j(\{|f_j| \geqslant \lambda\})$; тогда

$$G_j(\zeta) = (-\zeta)\int\limits_0^\infty \lambda^{-\zeta-1} a_j(\lambda)\, d\lambda, \quad \operatorname{Re}\zeta = -q,$$

и, применяя обратное преобразование Меллина, получаем $a_1 = a_2$, что и требовалось.

Пусть теперь B — подпространство в $L^\infty(\sigma_1)$, содержащее константы (не обязательно замкнутое). Из леммы 1 легко вытекает

Лемма 2. *Если p — не целое четное и линейный оператор T отображает B и $L^p(\sigma_2)$ с сохранением L^p-норм, причем $T1 = 1$, то T сохраняет L^s-нормы для любого $s > 0$ и L^∞-нормы.*

Если p — целое четное, то утверждение леммы 1 неверно. Поэтому в случае целого четного p, вообще говоря, неверно и утверждение леммы 2, если не налагать дополнительных условий на подпространство B. Будем говорить, что B обладает свойством (α_m), $m = 1, 2, \ldots$, если существуют не более m подалгебр с 1 в $L^\infty(\sigma_1)$ таких, что они содержатся в B, а их (равномерно) замкнутая линейная оболочка содержит B.

Лемма 3. *Если p — целое четное, $p \neq 2$, то утверждение леммы 2 справедливо при условии, что B обладает свойством $(\alpha_{p/2})$.*

С помощью лемм 2 и 3 (а также леммы 2 из работы ([3])) доказывается следующая теорема о продолжении изометрических операторов, заданных на подпространствах в L^p.

Теорема 1. *Пусть линейный оператор T отображает B в $L^p(\sigma_2)$ с сохранением L^p-норм и пусть $p \neq 2$. Если p — целое четное, то будем предполагать, что B обладает свойством $(\alpha_{p/2})$. Пусть $F = T1$ и $\tilde{B}$ — наименьшая симметричная подалгебра в $L^\infty(\sigma_1)$, содержащая B. Тогда существует линейный оператор $\tilde{T}$ на $\tilde{B}$ такой, что:*

1) $\tilde{T}$ *L^p-изометрически отображает $\tilde{B}$ в $L^p(\sigma_2)$;*

2) $\tilde{T}$ *имеет вид*

$$\tilde{T}f = F\varphi(f), \quad f \in \tilde{B},$$

где φ — некоторый L^∞-изометрический симметричный гомоморфизм алгебры $\tilde{B}$ в $L^\infty(\sigma_2)$;

3) *сужение $\tilde{T}$ на B совпадает с T.*

Замечание. Все предыдущие утверждения с очевидными изменениями в формулировках справедливы и для вещественных L^p; отметим лишь, что при целых четных p в этом случае достаточно требовать выполнения условия (α_p).

2. Теорема 1 может быть применена для отыскания общего вида изометрических преобразований на некоторых подпространствах в L^p. Прежде всего заметим, что из этой теоремы легко получить доказательство известной теоремы Банаха — Ламперти ([1, 2]) об общем виде изометрических преобразований во всем L^p. Далее, если подпространство B таково, что алгебра $\tilde{B}$ плотна в L^p, то задача описания L^p-изометрических преобразований B сведется, ввиду теоремы 1, к отысканию таких изометрических операторов во всем L^p, относительно которых B инвариантно.

Пусть D_1 и D_2 — ограниченные области в C^n. Обозначим через $L_a{}^p(D_j)$, $j = 1, 2$, подпространство в $L^p(D_j, d\sigma_j)$, состоящее из аналитических в D_j функций. Здесь $d\sigma_j$ — нормированная мера Лебега в D_j.

Теорема 2. *Предположим, что* $\operatorname{int}\overline{D}_1 = D_1$ ($\operatorname{int}\overline{D}_1$ *— внутренность* $\overline{D}_1$) и *что* $L_a^\infty(D_1)$ *плотно в* $L_a^p(D_1)$. *Пусть* T *— изометрическое вложение пространства* $L_a^p(D_1)$ *в* $L_a^p(D_2)$. *Тогда, если* $p \neq 2$, *существует голоморфное отображение* τ: $D_2 \to \overline{D}_1$, *обладающее следующими свойствами:*

1) τ *биголоморфно отображает область*

$$D_2 \setminus \{\lambda: \lambda \in D_2,\ \tau'(\lambda) = 0\} \stackrel{\mathrm{def}}{=} D_2 \setminus J,$$

где τ' *— якобиан* τ *на область в* D_1, *дополнение которой до* D_1 *имеет меру* 0;

2) $(\tau')^{2/p}$ *существует как однозначная голоморфная функция в* D_2;

3) *для всякой* $f \in L_a^p(D_1)$

$$Tf = e^{i\gamma}(V_2 / V_1)^{1/p}(\tau')^{2/p} f(\tau) \qquad (4)$$

на $D_2 \setminus J$ *и* $Tf = 0$ *на* J, *где* γ *— вещественная постоянная, а* V_j *— объем* D_j, $j = 1, 2$.

Обратно, для любого голоморфного отображения τ: $D_2 \to \overline{D}_1$, *обладающего свойствами* 1) *и* 2), *и любой вещественной* γ *формула* (4) *определяет изометрическое вложение* T: $L_a^p(D_1) \to L_a^p(D_2)$.

Замечание. При $n = 1$ и любом $p \neq 2$ или при любом n, но иррациональном p формулировка теоремы 2 упрощается. Именно, в этом случае $J = \phi$ (и, следовательно, τ отображает D_2 в D_1). Если же $n > 1$ и p рационально, то, как показывают простые примеры, J может быть непусто.

Из теоремы 2 легко вытекает

Теорема 3. *Предположим, что* $\operatorname{int}\overline{D}_j = D_j$ *и* $L_a^\infty(D_j)$ *плотно в* $L_a^p(D_j)$, $j = 1, 2$. *Если пространства* $L_a^p(D_1)$ *и* $L_a^p(D_2)$ *изометрически изоморфны, то области* D_1 *и* D_2 *биголоморфно эквивалентны.*

3. Пусть теперь D_1 и D_2 — ограниченные области в R^n, $n > 1$. Обозначим через $L_h^p(D_j)$, $j = 1, 2$, подпространство в $L^p(D_j, d\sigma_j)$, состоящее из гармонических в D_j функций.

Теорема 4. *Если* $\operatorname{int}\overline{D}_1 = D_1$ *и пространство* $L_h^p(D_1)$ *изометрически изоморфно какому-нибудь подпространству в* $L_h^p(D_2)$, $p \neq 2$, *то существует область* $G_1 \subset D_1$ *такая, что мера* $D_1 \setminus G_1$ *равна* 0, *и при* $p \neq n / (n-2)$ *области* G_1 *и* D_2 *совпадают с точностью до преобразования подобия*, если же* $p = n / (n-2)$, *то эти области совпадают с точностью до преобразований подобия и инверсии.*

Если предположить, что $L_h^\infty(D_1)$ плотно в $L_h^p(D_1)$, то в случае, когда p не целое четное, можно показать, что любой оператор изометрического вложения $L_h^p(D_1)$ и $L_h^p(D_2)$ порождается некоторым преобразованием подобия (или подобия и инверсии, при $p = n / (n-2)$). Отсюда вытекает

Следствие. *Пусть* D *— ограниченная область в* R^n *такая, что* $\operatorname{int}\overline{D} = D$ *и* $L_h^\infty(D)$ *плотно в* $L_h^p(D)$. *Если* p *не целое четное, то в пространстве* $L_h^p(D)$ *нет собственного подпространства, изометрически изоморфного всему* $L_h^p(D)$.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
27 XI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Банах, Курс функціонального аналізу, Київ, 1948. [2] J. Lamperti, Pacif. J. Math., 8, № 3, 459 (1958). [3] А. И. Плоткин, ДАН, 185, № 5 (1969).

* Под преобразованием подобия здесь понимается произведение гомотетии и конгруентного преобразования.