

А. С. БЛОХИН, Н. С. БЛОХИНА

НАЧАЛО КОНВЕКЦИИ В ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ ТЕМПЕРАТУРЫ ИНВЕРСИИ ПЛОТНОСТИ

(Представлено академиком В. В. Шулейкиным 11 XII 1969)

На естественную конвекцию в различных водоемах в период осеннего выхолаживания и весеннего прогрева, существенно влияет наличие у воды максимума плотности при 4° . Этим максимумом плотности определяются также особенности гидрологического режима водоемов в зимний период, когда их поверхность покрыта льдом.

В последнее время задачи свободной конвекции тяжелой жидкости изучались рядом авторов с помощью численных методов (¹⁻⁷). В этих исследованиях предполагалось, что плотность жидкости является линейной функцией температуры

$$\rho(T) = \rho(T_0) - \beta(T - T_0), \quad (1)$$

однако для воды вблизи 4° справедливо соотношение

$$\rho(T) = \rho(4^\circ) - \gamma(T - T_0)^2. \quad (2)$$

Такая зависимость, обычно называемая инверсией плотности, должна привести к картине движения, существенно отличной от картины конвекции в жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры (1). Если жидкость подогревается снизу и внутри ее массы существует изотерма 4° , то ниже этой изотермы слой жидкости обладает плотностной стратификацией, неустойчивой по Рэлею, а выше — устойчивой. Взаимодействие неустойчивого и устойчивого слоев определяет качественное своеобразие конвекции воды в окрестности 4° . В лабораторных условиях интересные экспериментальные исследования конвекции в слое воды, образованном тающим льдом, проведены Y. = C. Yen'ом и F. Galea (^{8, 9}). С. Tien'ом в работе (¹⁰) дана попытка теоретического анализа влияния инверсии плотности на начало конвективного движения.

В настоящей работе приводятся результаты численного исследования свободной конвекции в тяжелой вязкой жидкости с квадратичной зависимостью плотности от температуры (2). Ввиду ограниченных возможностей вычислительных машин мы рассмотрели двумерную задачу о стационарных конвективных течениях внутри квадратной полости со стороной a . На нижней стенке температура предполагалась постоянной $T_1 = 8^\circ$, на верхней стенке $T_2 = 0^\circ$, а на боковых стенках — изменяющейся по линейному закону. За начало отсчета мы выбрали левый нижний угол квадрата, ось X направлена вдоль нижней стороны квадрата вправо, ось Y — вдоль боковой стороны вверх.

Систему уравнений запишем в безразмерной форме, за единицы измерения выберем следующие величины: за единицу расстояния — сторону квадрата a , времени a^2/ν , температуры $(T_1 - T_2)$, функции тока — вязкость жидкости ν :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) &= \Delta \Phi + G \frac{\partial (T - 0,5)^2}{\partial x}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \frac{1}{P} \Delta T. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь поле функции тока $\Psi(x, y)$; поле температур $T(x, y)$; поле вихря $\varphi(x, y) = -\Delta\Psi(x, y)$ ($\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$); число Грассхофа $G = [g\gamma(T_1 - T_2)^2/\nu^2]a^3$ (g — ускорение свободного падения); число Прандтля $P = \nu/\chi$ (χ — температуропроводность).

Граничные условия запишем в виде

$$\begin{aligned} T(x, 0) &= 1, & T(x, 1) &= 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ T(0, y) &= T(1, y) = 1 - y, & 0 \leq y \leq 1, \\ \Psi(x, 0) &= \Psi(x, 1) = \partial\Psi(x, 0)/\partial y = \partial\Psi(x, 1)/\partial y = 0, \\ & & 0 \leq x \leq 1, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Psi(0, y) = \Psi(1, y) = \partial\Psi(0, y)/\partial x = \partial\Psi(1, y)/\partial x = 0, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Система уравнений (3) и граничные условия (4) заменялись явной разностной схемой и граничными условиями, описанными в работе (3). В данной работе они не выписываются из-за громоздкости. Расчеты

проводились на ЭВМ БЭСМ-4 с использованием сетки 17×17 . Шаг по времени подбирали экспериментально из условия устойчивости счета. В качестве начальных условий принимались:

$$T_0(x, y) = 1 - y \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Psi_0(x, y) &= (1 + \cos 2\pi \times \\ &\times (x - 0,5)) (1 + \cos 2\pi \times \\ &\times (y - 0,5)) (1 + \\ &+ 0,076 \cos 2\pi(x - 0,5) - \\ &- 0,132 \cos 2\pi(y - 0,5)) * \quad (6) \end{aligned}$$

Когда в последовательных выдачах гидродинамических полей (выдачи происходили через 0,25 единиц безразмерного времени) устанавливалось 4 ÷ 5 десятичных знаков, считалось, что течение вышло на стационарный режим.

Рассчитывались варианты для $G = 2000; 3000; 3250; 3500; 3750; 4000; 6000; 7000; 8000$. Число Прандтля принималось равным $P = 11,59$. Это значение соответствует температуре инверсии плотности воды.

При $G = 2000; 3000$ начальное движение затухало: поле $\Psi(x, y) \rightarrow 0$, а поле температур $T(x, y) \rightarrow 1 - y$, т. е. стационарное конвективное движение отсутствовало.

При $G = 3250$ установилось стационарное конвективное течение (рис. 1). Области со стратификацией, неустойчивой по Рэлею, соответствует своя независимая система циркуляции, области с устойчивой стратификацией — своя, причем циркуляция нижней неустойчивой зоны проникает в устойчивую зону ($T > 0,5$). Течение несимметрично относительно вертикальной линии, проходящей через середину полости. В зоне с устойчивой стратификацией изотермы мало или даже практически не отличаются от изотерм поля температур (5), устанавливающегося в отсутствие конвективного движения. В зоне неустойчивой стратификации конвективные потоки деформируют изотермы поля (5): всплывающая жидкость увлекает за собой горизонтальные изотермы поля (5) вверх, а опускающаяся — вниз.

* См. формулу (1.10) работы (4).

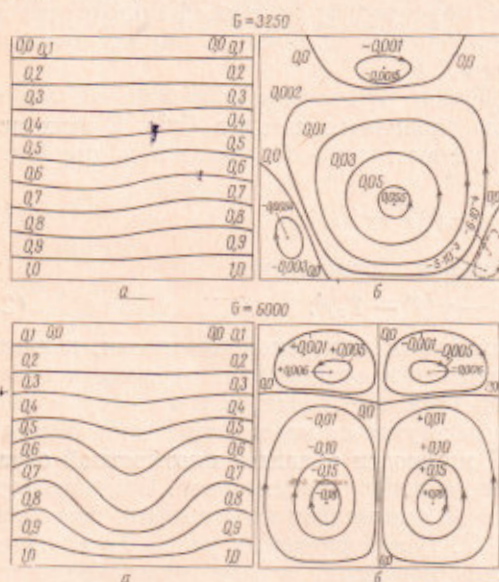


Рис. 1. а — поле T ; б — поле Ψ

При $G = 3500; 3750; 4000$ общий характер движения сохраняется, однако скорости течения жидкости возрастают с ростом числа Грассхофа, малый вихрь в правом нижнем углу уменьшается в размерах и исчезает, а вихрь в левом нижнем углу растет. Изотермы в зоне неустойчивой стратификации искажаются сильнее, а в устойчивой остаются практически без изменения.

При $G = 6000$ (см. рис. 1) стационарное течение приняло другой характер. Циркуляция как в нижней, так и в верхней зоне распалась каждая на два вихря. Гидродинамические поля стали симметричными относительно вертикальной линии, проходящей через середину полости. Жидкость поднимается вверх у стенок и опускается вниз в середине полости. Следует отметить, что в этом случае изотермы в зоне устойчивой стратификации мало отличаются от горизонтальных изотерм (5). При $G = 7000$ и $G = 8000$ картина та же, что при $G = 6000$, только движение стало более интенсивным.

Интересно сравнить симметричную ветвь течения, исследованную нами, с соответствующей ветвью течения жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры. В работе [4] установлено, что в этом случае симметричная ветвь течения метастабильна; мы получили стабильную симметричную ветвь. Из фиг. 10 статьи (4) видно, что жидкость поднимается вверх в середине полости и опускается вниз по краям, поэтому изотермы увлекаются вверх всплывающей жидкостью в середине полости и опускаются вниз вблизи стенок. Эта картина обратна картине течения, представленной нами на рис. 1 при $G = 6000$.

Верхняя независимая циркуляция изолирует нижнюю циркуляцию более теплой жидкости от холодной верхней стенки. Действительно, скорости в верхней зоне устойчивой стратификации в 20—30 раз меньше, чем скорости в нижней, неустойчивой зоне. Изотермы у верхней стенки практически не отличаются от горизонтальных изотерм-поля (5). Это означает, что градиенты температуры и, следовательно, тепловые потоки в зоне устойчивой стратификации такие же, как и в случае отсутствия конвективных потоков. Таким образом, остывание водоема замедляется после того, как в верхней части его образуется слой жидкости с температурой меньше 4° , что согласуется с многочисленными наблюдениями в естественных условиях.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
30 XI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ W. A. Deardorff, J. Atmosph. Sci., 21, № 4 (1964). ² J. E. Fromm, Phys. Fluids, 8, № 10, 1757 (1965). ³ Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, Е. Л. Тарунин, Изв. АН СССР, Мех. жидк. и газ., № 5, 56 (1966). ⁴ Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, Е. Л. Тарунин, Там же, № 6, 93 (1966). ⁵ M. R. Samuels, S. V. Churchill, Am. Inst. Chem. Eng. J., 13, № 1, 77 (1967). ⁶ В. И. Полежаев, Изв. АН СССР, Мех. жидк. и газ., № 2, 103 (1967). ⁷ В. И. Полежаев, Там же, № 5, 124 (1968). ⁸ Y.-C. Yen, Phys. Fluids, 11, № 6, 1263 (1968). ⁹ Y.-C. Yen, F. Galea, *ibid.*, 12, № 3, 509 (1969). ¹⁰ C. Tien, Am. Inst. Chem. Eng. J., 14, 652 (1968).